Über die Stabilität der quasi-beständigen Bewegung.

Inaugural-Dissertation

der

mathematischen und naturwissenschaftlichen Fakultät der Kaiser Wilhelms-Universität zu Straßburg zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Georg Dorner.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Leipzig
Druck von August Hoffmann
Spezialdruckerei für Dissertationen
1913.

Meinen Eltern
gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548001_0041

Inhalt.

Einleitung 7

I. Allgemeiner Teil.

§ 1. Allgemeine Form der Integrale eines Systems linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten 10
§ 2. Stabilität der Lösungen eines Systems linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten 16
§ 3. Die Fundamentalgleichung $A(s) = o$. Das transformierte System . 20
a) Allgemeine Methode zur Berechnung der Gleichung $A(s) = o$. 20
b) Das transformierte Differentialgleichungssystem 21
c) Stabilitätsbedingung für die Wurzeln der Gleichung $A(\bar{s}) = o$ des transformierten Systems 23
d) Bildung der Fundamentalgleichung $\bar{A}(\bar{s}) = o$ 24
e) Beziehung der vorgetragenen Stabilitätstheorie zur Routh'schen Theorie 28

II. Teil. Anwendungen.

§ 4. Zwei einfache Beispiele 31
§ 5. Stabilität eines auf elastischer Unterlage rotierenden Motors . . . 35
a) Die Bewegungsgleichungen 36
b) Die Hauptbewegung 37
c) Die Stabilität der Hauptbewegung 39
§ 6. Fortsetzung. Diskussion der Stabilität 39

Einleitung.

Man pflegt in der Mechanik das Gleichgewicht eines mechanischen Systems als stabil zu bezeichnen, wenn kleine Störungen, d. h. Lageänderungen, die mit dem System vorgenommen oder Impulse, die ihm erteilt werden, Bewegungen von nachstehender Beschaffenheit zur Folge haben:

Die Abweichung der Koordinaten von ihren Werten im Gleichgewicht ebenso die Geschwindigkeiten bleiben innerhalb vorgegebener beliebig kleiner Grenzen, sobald nur die Störungen bestimmte durch jene Grenzen festgelegte Werte nicht übersteigen.

In der üblichen Redeweise drückt man diesen Sachverhalt wohl so aus: Ein Gleichgewicht heißt stabil, wenn unendlich kleine Störungen unendlich kleine Bewegungen nach sich ziehen.

Man kann analog die Bewegung eines mechanischen Systems, die bei bestimmt gegebenen Anfangsbedingungen erfolgt, stabil nennen, wenn kleine Störungen, d. h. kleine Änderungen der Koordinaten- und Geschwindigkeitswerte, die man zu irgend einer Zeit dem System erteilt, nur solche Abweichungen von der zu untersuchenden Bewegung zur Folge haben, die innerhalb vorgegebener beliebig kleiner Grenzen bleiben. Dabei dürfen die Störungen bestimmte durch jene Grenzen festgelegte Werte nicht übersteigen, oder kürzer, es rufen unendlich kleine Störungen unendlich kleine Abweichungen von der zu untersuchenden Bewegung hervor.

Die Stabilitätsbestimmung eines Gleichgewichtes führt, wenn die Kräftefunktion und die Verbindungen des Systems von der Zeit unabhängig sind, stets auf die Diskussion linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Die Stabilität der Bewegung in dem oben angedeuteten Sinn hat bis jetzt nur in dem speziellen Falle der „steady motion“ („beständige Bewegung“) eine Untersuchung erfahren. Dieser Begriff der „steady motion“ ist von E. J. Routh in die Mechanik eingeführt und folgendermaßen erläutert worden:*)

*) E. J. Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper, Leipzig 1898. Bd. II, Kap. III, pag. 87.
„ Essay on the Stability of Motion, London 1887.

Ein Bewegungszustand eines mechanischen Systems von n Freiheitsgraden sei durch

$$(1)\ldots \qquad q_1 = f_1(t), \ldots . \qquad q_n = f_n(t)$$

bestimmt, und nach einer Störung führe das System die Bewegung

$$(2)\ldots \qquad q_1 = f_1(t) + Q_1(t), \ldots . q_n = f_n(t) + Q_n(t)$$

aus, so daß $Q_1, \ldots . Q_n$ die Änderungen der Bewegung infolge der Störung darstellen. Setzt man diese Werte (2) in die sog. Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art ein, entwickelt die letzteren in der Nähe der Größen $f_1(t) \ldots . f_n(t)$ nach steigenden Potenzen von

$$(3)\ldots \qquad Q_1 \ldots . Q_n,\ \dot{Q}_1 = \frac{d\,Q_1}{d\,t}, \ldots . \dot{Q}_n = \frac{d\,Q_n}{d\,t}$$

und vernachlässigt in dieser Entwicklung Produkte und höhere als erste Potenzen der Größen (3), so erhält man zur Bestimmung der $Q_1 \ldots . Q_n$ ein System von n linearen Differentialgleichungen:

$$(4)\quad \begin{cases} a_{11}\ddot{Q}_1 + a_{12}\ddot{Q}_2 + \cdots + b_{11}\dot{Q}_1 + b_{12}\dot{Q}_2 + \cdots + c_{11}Q_1 + c_{12}Q_2 + \cdots = 0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots

Die vorliegende Arbeit sucht die Stabilitätstheorie auf den Fall auszudehnen, in dem die Koeffizienten der linearen Lagrange'schen Gleichungen (4) nicht mehr konstante, sondern *periodische Funktionen* mit einer gemeinsamen Periode werden. Nennen wir eine Bewegung, für die solches stattfindet, quasi-beständig, so läßt sich der Inhalt der vorliegenden Arbeit kurz bezeichnen: *Es sollen die Stabilitätsbedingungen der quasi-beständigen Bewegung erkannt werden.*

Im allgemeinen Teil wird das hiermit bezeichnete Problem insofern erledigt, als die Frage nach der Stabilität der Bewegung zurückgeführt wird auf die Wurzeldiskussion einer algebraischen Gleichung, die freilich keineswegs so einfach aus dem gegebenen Differentialgleichungssystem gebildet werden kann, wie dies bei konstanten Koeffizienten der Fall war.

Es läßt sich indessen das Problem weiter zurückführen auf die Untersuchung der Integrale von linearen Differentialgleichungen mit eindeutigen Koeffizienten beim Umlauf um bestimmte singuläre Stellen. In allen Fällen, in denen die Behandlung dieses transformierten Problems gelingt, in denen man insbesondere für den in Rede stehenden Umlauf die Fundamentalgleichung aufstellen kann, wird sich die Stabilität bez. Instabilität feststellen lassen. Und zwar lautet unsere Stabilitätsbedingung einfach dahin, *daß die Wurzeln der betreffenden Fundamentalgleichung im Einheitskreise liegen müssen.*

Die Berechnung der Fundamentalgleichung gelingt am einfachsten, wenn sämtliche vom Umlauf umschlossene singuläre Stellen Bestimmtheitsstellen sind. Auf diesen Fall wird des Näheren eingegangen, und es wird eine Klasse von Differentialgleichungen angegeben, für die dasselbe zutrifft.

Im zweiten Teil der Arbeit werden dann einige Beispiele solcher Differentialgleichungen betrachtet. Ausführlich diskutiert wird die Stabilität eines mechanischen Systems, das aus einem auf elastischer Unterlage ruhenden Motor besteht.

I. Allgemeiner Teil.

§ 1. Allgemeine Form der Integrale eines Systems linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten.

In den Annales de l'Ecole Normale vom Jahre 1883/84 hat Floquet erstmals für eine Differentialgleichung n ter Ordnung, deren Koeffizienten periodische Funktionen des Argumentes t sind, nachgewiesen, daß dieselbe stets sog. periodische Funktionen zweiter Art, d. h. Funktionen der Form $e^{\alpha t} \cdot g(t)$, wobei $g(t)$ eine periodische Funktion ist, als Lösungen besitzt.

Dieser Floquet'sche Satz ist später von Callendreau, Bruns und Andern dahin verallgemeinert worden, daß sich die allgemeine Lösung einer solchen Differentialgleichung in jedem Falle aus endlich vielen Gliedern der Gestalt $e^{\alpha t} t^l g(t)$ zusammensetzt, und in dieser Fassung bleibt der Satz auch für Systeme von linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten in Gültigkeit. Wir skizzieren im folgenden einen unseres Erachtens in dieser Gestalt nicht bekannten Beweis für die behauptete Form der Integrale, der sich einfach aus bekannten Sätzen der Theorie der linearen Substitutionen ergibt*).

Wir nehmen zu dem Ende an, was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, daß das System der linearen Differentialgleichungen in der Gestalt vorliege:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dt} = \varphi_{11}(t)\,\psi_1 + \cdots + \varphi_{1n}(t)\,\psi_n, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d\psi_n}{dt} = \varphi_{n1}(t)\,\psi_1 + \cdots + \varphi_{nn}(t)\,\psi_n, \end{cases}$$

wobei die Funktionen $\varphi_{ik}(t)$ in der ganzen Ebene mit Ausnahme einzelner Punkte eindeutige analytische Funktionen des Argumentes (t) sind, die die reelle Periode ω besitzen, so daß also:

*) Vergleiche die Darstellung bei Charlier, Mechanik des Himmels Bd. I und Poincaré „Nouvelles méthodes de la mécanique céleste, t. I. pag. 63.

(2) $\ldots \varphi_{ik}(t+\omega) = \varphi_{ik}(t)$ ist.

Aus der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen ist bekannt, daß es ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichungen (1) gibt

$$(3)\qquad \begin{cases} f_{11}(t), f_{12}(t), \ldots . f_{1n}(t), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{n1}(t), f_{n2}(t), \ldots . f_{nn}(t), \end{cases}$$

durch welches jedes beliebige andere Lösungssystem $F_1(t), \ldots F_n(t)$ linear in der Form dargestellt werden kann:

$$(4)\qquad \begin{cases} F_1 = c_1 f_{11}(t) + \cdots + c_n f_{1n}(t), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F_n = c_1 f_{n1}(t) + \cdots + c_n f_{nn}(t), \end{cases}$$

wobei die c_i Konstante sind.

Denkt man sich aus dem Fundamentalsystem (3) irgend n Lösungen $f_{1k}, f_{2k}, \ldots . f_{nk}$ in die Gleichungen (1) eingeführt und vermehrt das Argument um ω, so bleiben nach (2) die Koeffizienten $\varphi_{ik}(t)$ ungeändert. Die Lösungen $f_{ik}(t)$ aber gehen über in $f_{ik}(t+\omega)$. Wir schließen daher, daß $f_{ik}(t+\omega)$ ebenfalls Lösungen des Systems (1) sind und, nach dem ebengenannten Satze, daß sie sich linear mit konstanten Koeffizienten durch das Partikularsystem (3) ausdrücken lassen. Man hat die Beziehungen:

$$(5)\qquad \begin{cases} f_{h1}(t+\omega) = A_{11} f_{h1}(t) + A_{12} f_{h2}(t) + \cdots A_{1n} f_{hn}(t), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot

Gleichungen (5) aufzufassen als eine lineare Substitution, die durch die Substitution (7) transformiert werden soll. Nach bekannten Sätzen aus der Theorie der linearen Substitutionen ist der Charakter einer solchen Transformation bestimmt durch die Wurzeln oder genauer gesagt durch die Elementarteiler der zu der Substitution (5) gehörigen Fundamentalgleichung:

$$(8) \qquad A(s) = \begin{vmatrix} A_{11} - s, & A_{12}, \ldots . A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22} - s, \ldots . A_{2n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ A_{n1}, & A_{n2} \ldots \ldots . A_{nn} - s \end{vmatrix} = 0. \quad *)$$

Sind alle Elementarteiler dieser Gleichung einfach, dann lassen sich die B_{ik} so bestimmen, daß die Funktionen $\Psi_{h1}, \Psi_{h2} \ldots . \Psi_{hn}$ bei Argumentvermehrung um ω die Substitution erfahren

$$(9) \ldots \qquad \begin{cases} \Psi_{h1}(t + \omega) = s_1 \Psi_{h1}(t), \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \Psi_{hn}(t + \omega) = s_n \Psi_{hn}(t), \end{cases}$$

wobei die Größen s_i die Wurzeln der Gleichung $A(s) = o$ sind, die aber nicht notwendig voneinander verschieden sind.

Sind hingegen unter den Elementarteilern der Gleichung $A(s) = o$ mehrfache, dann lehrt die Theorie der Elementarteiler, daß man die Größen B_{ih} so wählen kann, daß zu jedem ν fachen Elementarteiler $(s - s_i)^\nu$ eine Gruppe von ν Integralen $\Psi_{hi_1}, \ldots . \Psi_{hi_\nu}$ existiert, die bei Argumentvermehrung um die Periode die Substitution erfährt:

$$(10) \qquad \begin{cases} \Psi_{hi_1}(t + \omega) = s_i \Psi_{hi_1}(t), \\ \Psi_{hi_2}(t + \omega) = s_i \Psi_{hi_2}(t) + \Psi_{hi_1}(t), \\ \Psi_{hi_3}(t + \omega) = s_i \Psi_{hi_3}(t) + \Psi_{hi_2}(t), \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \Psi_{hi_\nu}(t + \omega) = s_i \Psi_{hi_\nu}(t) + \Psi_{hi_{\nu-1}}(t). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (9) u. (10) ist es nun leicht, die anfangs erwähnte Form der Integrale herzuleiten. Wir wollen zunächst annehmen, daß alle Elementarteiler der Gleichung $A(s) = 0$ einfach sind. Setzt man dann:

$$(11) \qquad s_i = e^{r_i},$$

so bleibt die Funktion $\Psi_{hi}(t) \cdot e^{-\frac{r_i}{\omega} t}$ bei Argumentvermehrung um ω ungeändert; denn es ist:

---

*) Vergl. Weber, Lehrbuch der Algebra, Bd. II, 2. Aufl. § 41, 42.

$$e^{-\frac{r_i}{\omega}(t+\omega)}\,\Psi_{hi}(t+\omega) = e^{-\frac{r_i}{\omega}t}\,\Psi_{hi}(t)\cdot e^{-r_i}\,e^{r_i} = e^{-\frac{r_i}{\omega}t}\,\Psi_{hi}(t).$$

Die Funktion $e^{-\frac{r_i}{\omega}t}\,\Psi_{hi}(t)$ ist demnach eine periodische Funktion mit der Periode ω. Nennen wir dieselbe $\Phi_{hi}(t)$, so folgt für $\Psi_{hi}(t)$ die Darstellung:

$$\Psi_{hi}(t) = e^{\frac{r_i t}{\omega}}\,\Phi_{hi}(t).$$

Wir fassen das Resultat zusammen in dem

Satz I:

Sind alle Elementarteiler der Fundamentalgleichung $A(s) = 0$ einfach, dann existiert ein Fundamentalsystem von Lösungen $\Psi_{hk}(t)$, das sich in folgender Weise durch periodische Funktionen Φ_{hk} und Exponentialfunktionen darstellen läßt:

$$(12)\ldots \quad \begin{cases} \Psi_{h1}(t) = e^{\frac{r_1}{\omega}t}\,\Phi_{h1}(t) \\ \quad\ldots\ldots\ldots \\ \Psi_{hn}(t) = e^{\frac{r_n}{\omega}t}\,\Phi_{hn}(t) \end{cases}$$

hierbei ist $r_i = \log s_i$ und s_i eine Wurzel der Gleichung $A(s) = o$.

Ein analoges Resultat läßt sich im allgemeinen Falle, daß die Fundamentalgleichung mehrfache Elementarteiler hat, erzielen. Hier gilt der

Satz II:

Hat die Fundamentalgleichung $A(s) = o$ mehrfache Elementarteiler, dann existiert ein Fundamentalsystem von Lösungen, das sich nach den Elementarteilern in Gruppen ordnen läßt, derart, daß zu dem ν fachen Elementarteiler $(s-s_i)^\nu$ eine Gruppe von Lösungen $\Psi_{hi_1}(t), \ldots \Psi_{hi_\nu}(t)$ gehört, die sich durch Exponentialfunktionen und periodische Funktionen $\Phi_{hi_1} \ldots \Phi_{hi_\nu}$ in folgender Weise darstellen läßt:

$$(13) \quad \begin{cases} \Psi_{hi_1}(t) = e^{\frac{r_i}{\omega}t}\cdot\Phi_{hi_1}(t) \\ \Psi_{hi_2}(t) = e^{\frac{r_i}{\omega}t}\left[\Phi_{hi_2}(t) + \frac{1}{s_i}\,\Phi_{hi_1}(t)\cdot l_1(t)\right] \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Psi_{hi_\nu}(t) = e^{\frac{r_i}{\omega}t}\left[\Phi_{hi_\nu}(t) + \frac{1}{s_i}\,\Phi_{hi_{\nu-1}}(t)\cdot l_1(t) + \cdots\cdots\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \frac{1}{s_i^{\nu-1}}\,\Phi_{hi_1}(t)\,l_{\nu-1}(t)\right] \end{cases}$$

Dabei ist wiederum $r_i = \log s_i$ *und* $l_\mu(t)$ *ist ein Polynom in t vom Grade* μ *und zwar:*

$$(14)\qquad \begin{cases} l_1(t) = \dfrac{t}{\omega}, \\ l_2(t) = \dfrac{l_1(l_1-1)}{2!}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ l_\mu(t) = \dfrac{l_1(l_1-1)\ \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \ (l_1-\mu+1)}{\mu!}. \end{cases}$$

Um die Richtigkeit des Satzes zu erkennen, fasse man die Gleichungen (13) als ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Funktionen $\Phi_{hi_\mu}(t)$ auf. Läßt sich zeigen, daß die Funktionen $\Phi_{hi_\mu}(t)$, die man so erhält, periodische Funktionen mit der Periode ω sind, dann ist der Satz offenbar als bewiesen anzusehen. Aus der ersten Gleichung (13) folgt nun wie beim Beweise des Satzes I, daß $\Phi_{hi_1}(t)$ eine periodische Funktion ist. Aus der zweiten Gleichung (13) aber ergibt sich:

$$(15)\qquad \Phi_{hi_2}(t) = \frac{\Psi_{hi_2}(t)}{e^{\frac{r_i}{\omega}t}} - \frac{1}{s_i}\Phi_{hi_1}(t)\,l_1(t).$$

Vermehrt man in dieser Gleichung t um die Periode ω und berücksichtigt, daß nach (14):

$$(16)\qquad \begin{cases} l_1(t+\omega) = l_1(t)+1, \\ l_2(t+\omega) = l_2(t)+l_1(t), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ l_\mu(t+\omega) = l_\mu(t)+l_{\mu-1}(t), \end{cases}$$

ist, so folgt, daß

$$\Phi_{hi_2}(t+\omega) = \frac{s_i\,\Psi_{hi_2}(t)+\Psi_{hi_1}(t)}{s_i\,e^{\frac{r_i}{\omega}t}} - \frac{1}{s_i}\Phi_{hi_1}(t)\,(l_1(t)+1) =$$

$$= \frac{\Psi_{hi_2}(t)}{e^{\frac{r_i\,t}{\omega}}} - \frac{1}{s_i}\Phi_{hi_1}(t)\,l_1(t) = \Phi_{hi_2}(t) \text{ ist.}$$

Damit ist gezeigt, daß Φ_{hi_2} periodisch ist. Man beweist geradeso, daß $\Phi_{hi_3}(t)$ periodisch ist, und mit Hilfe der Formeln (16) kann man das Resultat durch einen vollständigen Induktionsschluß zu einem allgemeinen machen. Ist nämlich gezeigt, daß $\Phi_{hi_1}(t)$, $\Phi_{hi_2}(t)$ . . . . bis

$$\Phi_{hi_\mu}(t) = e^{\frac{-r_i\,t}{\omega}}\,\Psi_{hi_\mu}(t) - \frac{1}{s_i}\Phi_{hi_{\mu-1}}(t)\,l_1(t) - \cdots - \frac{1}{s_i^{\mu-1}}\Phi_{hi_1}(t)\,l_{\mu-1}(t)$$

periodisch sind, dann folgt, daß auch

$$(17)\quad \Phi_{\mathrm{hi}\,\mu+1}(t) = e^{\frac{-r_i t}{\omega}} \Psi_{\mathrm{hi}\,\mu+1}(t) - \frac{1}{s_i}\Phi_{\mathrm{hi}\,\mu}(t)\,l_1(t) - \cdots - \frac{1}{s_i^{\mu}}\Phi_{\mathrm{hi}\,1}(t)\,l_\mu(t)$$

periodisch ist. Man hat aus der letzten Gleichung nach (10) und (16)

$$(18)\quad \begin{aligned} &\Phi_{\mathrm{hi}\,\mu+1}(t+\omega) = e^{\frac{-r_i(t+\omega)}{\omega}}\left[\Psi_{\mathrm{hi}\,\mu+1}(t)\,s_i + \Psi_{\mathrm{hi}\,\mu}(t)\right] - \\ &\frac{1}{s_i}\Phi_{\mathrm{hi}\,\mu}(t)\left(l_1(t)+1\right) - \cdots - \frac{1}{s_i^{\mu}}\Phi_{\mathrm{hi}\,1}(t)\left(l_\mu(t) + l_{\mu-1}(t)\right) \\ &= e^{\frac{-r_i t}{\omega}}\Psi_{\mathrm{hi}\,\mu+1}(t) - \frac{1}{s_i}\Phi_{\mathrm{hi}\,\mu}(t)\,l_1(t) - \cdots - \frac{1}{s_i^{\mu}}\Phi_{\mathrm{hi}\,1}(t)\,l_\mu(t) \\ &+\frac{1}{s_i}\left[e^{\frac{-r_i t}{\omega}}\Psi_{\mathrm{hi}\,\mu}(t) - \Phi_{\mathrm{hi}\,\mu}(t) - \frac{1}{s_i}\Phi_{\mathrm{hi}\,\mu-1}(t)\,l_1(t) - \cdots - \frac{1}{s_i^{\mu-1}}\Phi_{\mathrm{hi}\,1}(t)\,l_{\mu-1}(t)\right], \end{aligned}$$

also nach (17) und (18):

$$\Phi_{\mathrm{hi}\,\mu+1}(t+\omega) = \Phi_{\mathrm{hi}\,\mu+1}(t).$$

Wenn wir in den Formeln des Satzes II die Glieder gleicher Potenzen in t zusammenfassen und nach steigenden Potenzen von t ordnen, so erhalten wir die Darstellung, auf die es uns im wesentlichen ankam. Wir sprechen dies Resultat aus in dem Satze:

Satz III.

Ein System linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten besitzt stets ein Fundamentalsystem von Lösungen, das sich nach den Elementarteilern der Fundamentalgleichung $A(s) = o$ derart in Gruppen ordnen läßt, daß zu jedem νfachen Elementarteiler $(s - s_i)^\nu$ ein System von ν Lösungen $\Psi_{\mathrm{hi}\,1}(t) \ldots \Psi_{\mathrm{hi}\,\nu}(t)$ gehört, die sich durch Exponentialfaktoren und periodische Funktionen $\Phi_{\mathrm{hi}}(t)$ in folgender Weise darstellen lassen:

$$(19)\quad \begin{cases} \Psi_{\mathrm{hi}\,1}(t) = e^{\frac{r_i t}{\omega}}\Phi_{\mathrm{hi}\,1}(t) \\ \Psi_{\mathrm{hi}\,2}(t) = e^{\frac{r_i t}{\omega}}\left[\Phi_{\mathrm{hi}\,2}(t) + t\,\Phi_{\mathrm{hi}\,2,1}(t)\right] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Psi_{\mathrm{hi}\,\nu}(t) = e^{\frac{r_i t}{\omega}}\left[\Phi_{\mathrm{hi}\,\nu}(t) + t\,\Phi_{\mathrm{hi}\,\nu,1}(t) + \cdots t^{\nu-1}\Phi_{\mathrm{hi}\,\nu,\nu-1}(t)\right] \end{cases}$$

wobei $s_i = e^{r_i}$ ist.

Im ganzen wird man so viele solcher Systeme erhalten, als es verschiedene Elementarteiler gibt. Die mit t behafteten Glieder werden hierbei dann und nur dann wegfallen, wenn sämtliche Elementarteiler einfach sind.

§ 2. Stabilität der Lösungen eines Systems linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten.

Wir wollen, bevor wir die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten weiter verfolgen, den Zusammenhang mit der Stabilitätsfrage darlegen. Bei Stabilitätsuntersuchungen sind die Größen, die wir in unseren Differentialgleichungen bestimmen, mechanisch als die Abweichungen aufzufassen, die die Lagen und Geschwindigkeiten eines mechanischen Systems (gegenüber ihren Werten in einem auf Stabilität zu untersuchenden Bewegungszustand) durch kleine Störungen erhalten.

Um die Aufgabe genauer zu fixieren, sei ein mechanisches System von n Freiheitsgraden mit den Koordinaten $q_1, \cdots q_n$ gegeben. Die Systemkomponenten der gegebenen Kräfte seien $K_1, \cdots K_n$, so daß $\delta A = K_1 \delta q_1 + \cdots K_n \delta q_n$ die bei einer virtuellen Verrückung an dem System geleistete Arbeit darstellt. Wir nehmen weiter an, daß durch

$$(B_o) \qquad q_1 = f_1(t), \cdots q_n = f_n(t)$$

ein auf Stabilität zu untersuchender Bewegungszustand des Systems bestimmt sei und daß die Größen $K_1, \cdots K_n$, ebenso so die lebendige Kraft T nach den Größen $q_1, \cdots q_n, \dot{q}_1, \cdots \dot{q}_n$ in der Nähe der durch (B_o) dargestellten Werte $f_1, \cdots f_n$ bez. $f'_1, \cdots f'_n$ in Taylor-Reihen entwickelbar seien. Nach einer kleinen Störung führe das System die Bewegung:

$$(B_1) \qquad q_1 = f_1(t) + Q_1(t), \cdots q_n = f_n(t) + Q_n(t)$$

aus. Es stellen dann die $Q_1(t), \cdots Q_n(t)$ die Abweichungen von der Bewegung (B_o) dar. Setzt man jetzt die (B_1) in die Bewegungsgleichungen, die sog. Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art

$$(L) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = K_1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_n} = K_n \end{cases}$$

ein, entwickelt diese Gleichungen nach steigenden Potenzen von $Q_1, \cdots Q_n$, $\dot{Q}_1, \cdots \dot{Q}_n$:

$$(M) \qquad \begin{cases} a_{11}\ddot{Q}_1 + a_{12}\ddot{Q}_2 + \cdots + b_{11}\dot{Q}_1 + \cdots + c_{11}Q_1 + \cdots + d_{11}\dot{Q}_1^2 + \cdots = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}\ddot{Q}_1 + a_{n2}\ddot{Q}_2 + \cdots + b_{n1}\dot{Q}_1 + \cdots + c_{n1}Q_1 + \cdots + d_{n1}\dot{Q}^2_1 + \cdots = 0, \end{cases}$$

so wird man im Stabilitätsfall die Produkte und höhere als erste Potenzen der $Q_1, \cdots Q_n$, sowie deren Ableitungen nach der Zeit vernachlässigen dürfen unter der Voraussetzung wenigstens, daß die Koeffizienten $d_{11} \cdots$ der in der Entwicklung vernachlässigten Glieder als Funktionen der Zeit in endlichen Grenzen variieren. Die Gleichungen für die $Q_1, \cdots Q_n$, die man so erhält:

$$(N) \quad a_{i1}\ddot{Q}_1 + \cdots + b_{i1}\dot{Q}_1 + \cdots + c_{i1}Q_1 + \cdots = 0, \qquad (i = 1, \cdots n)$$

sind linear von der zweiten Ordnung und ihre Lösungen geben in erster Annäherung wenigstens Aufschluß über den Stabilitätscharakter der zu untersuchenden Bewegung.

Eine allgemeine Theorie der Stabilität der Bewegung kommt demnach zurück auf die Untersuchung der Lösungen linearer Differentialgleichungen mit beliebigen Koeffizienten, wenn die unabhängige Variable (die Zeit) die reellen Werte von 0 bis ∞ durchläuft. Für dieses so definierte Stabilitätsproblem lassen sich zur Zeit in seiner Allgemeinheit praktisch brauchbare Kriterien nicht aufstellen. Eine nähere Untersuchung hat bis jetzt die Stabilität der Bewegung nur in dem Falle der „steady motion“ erfahren.*)

Die physikalische Besonderheit dieser Bewegung liegt in dem Umstand, daß auf gleiche Störungen stets gleiche Abweichungen erfolgen, in welchem Momente man diese Störungen auch vornehmen mag, mit anderen Worten, daß die Koeffizienten der Differentialgleichungen (N) für $Q_1, \ldots . Q_n$ von der Zeit unabhängig sind. Routh zeigt, daß die Stabilität der „steady motion“ bedingt ist durch die Beschaffenheit der Wurzeln einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten sich in einfacher Weise aus denen der gegebenen Differentialgleichungen berechnen lassen

Auf Grund der in § 1 erkannten allgemeinen Form der Lösungen sind wir nun imstande, diese Routh'sche Theorie auf den Fall zu verallgemeinern, daß die Koeffizienten (a, b, c) des linearen Differentialgleichungssystems (N), dem die Abweichungen $Q_1, \ldots . Q_n$ genügen, periodische Funktionen der Zeit sind. Physikalisch sind diese Bewegungen dahin zu charakterisieren, daß nach gleichen Zeitintervallen auf gleiche Störungen gleiche Schwingungen erfolgen.

Wir führen für diesen Fall die Bezeichnung „quasi-steady motion“ (quasi-beständige Bewegung) ein und erklären:

---

*) E. J. Routh. Dynamik d. Systeme starrer Körper, Leipzig 1898, Band II, Kap. III.

Essay on the Stability of Motion, London 1877.

Ein Bewegungszustand $q_1 = f_1(t), \ldots . q_n = f_n(t)$ *heiße quasi-beständig, wenn die durch kleine Störungen verursachten Störungsbewegungen linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten genügen, d. h. wenn in dem System (N) die Koeffizienten a, b. c periodische Funktionen einer gemeinsamen Periode* ω *sind.*

Zugleich stellen wir die folgende Definition der Stabilität einer Bewegung auf:

Eine Bewegung heißt stabil, wenn es zu einer beliebig kleinen Zahl ε *eine Zahl* η *derart gibt, daß alle Störungen d. h. momentane Lage- und Geschwindigkeitsänderungen, die absolut* $< \eta$, *solche Abweichungen von dem auf Stabilität zu untersuchenden Bewegungszustand zur Folge haben, die ebenso wie ihre Ableitungen nach der Zeit absolut* $< \varepsilon$ *bleiben.*

Zur Entscheidung der Stabilität einer quasi-beständigen Bewegung ist lediglich die Form der Lösungen, wie wir sie in § 1, Satz III gegeben haben, notwendig. Bringen wir nämlich unser Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung (N), dem die Abweichungen $Q_1, \ldots . Q_n$ genügen, auf die in § 1 zu Grunde gelegte Normalform (1), verstehen wir also unter Ψ_i die Größen Q und deren Ableitungen nach der Zeit, so setzt sich eine jede Abweichung bez. deren Ableitung, wie in § 1 gezeigt, aus Gliedern der Gestalt:

$$\Psi_{hi_\mu}(t) = e^{\frac{r_i t}{\omega}} \left[\Phi_{hi_\mu}(t) + t\,\Phi_{hi_\mu,1}(t) + \ldots . t^{\mu-1} \Phi_{hi_\mu,\mu-1}(t) \right]$$

linear mit konstanten Koeffizienten c_{i_μ} zusammen. Diese konstanten Koeffizienten ihrerseits sind linear durch die Anfangswerte $\Psi_{hi_\mu}(o)$ bestimmt. Soll daher die allgemeine Lösung für kleine Anfangsbedingungen $\Psi_{hi_\mu}(o)$ d. h. kleine c_{i_μ} endlich bleiben, wenn t von o bis ∞ variiert, so wird allen Partikularlösungen (19) einzeln diese Eigenschaft zukommen müssen. Umgekehrt wird man in solchem Falle die Größen $\Psi_{hi_\mu}(o)$ bez. die Konstanten c_{i_μ} so klein ($< \eta$) wählen können, daß für diese und alle kleineren Anfangswerte die allgemeine Lösung absolut $< \varepsilon$ bleibt.

Um nun festzustellen, wann eine Partikularlösung $\Psi_{hi_\mu}(t)$ endlich bleibt, wenn t von o bis ∞ geht, wollen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem in derselben die mit Potenzen von t behafteten Glieder auftreten oder fehlen, d. h. je nachdem die zugehörigen Elementarteiler mehrfach oder einfach sind. Im ersteren Falle wird man schließen, daß zur Stabilität hinreichend und notwendig ist, daß r_i negativen reellen Teil haben muß d. h., wenn $r_i = \alpha_i + i\beta_i$ gesetzt wird, daß $\alpha_i < o$ sein muß; im anderen Fall hingegen, wenn die Potenzen von t fehlen, wird das Glied $\Psi_{hi_\mu}(t)$ auch dann noch

innerhalb einer endlichen Schranke bleiben, wenn $\alpha_i = 0$ ist. Diese beiden Fälle sind auch dadurch voneinander geschieden, daß im ersteren die durch das Glied (19) dargestellte Bewegung mit wachsender Zeit verschwindet, während im anderen Falle, sobald $\alpha_i = 0$, eine periodisch wechselnde Bewegung von stets gleicher Stärke bestehen bleibt.

Um dieser Möglichkeit Rechnung zu tragen, bezeichnen wir einen stabilen Bewegungszustand als

Stabil von I. Art, wenn mit wachsender Zeit alle durch Störungen hervorgerufenen Schwingungen um denselben verschwinden,

dagegen als

Stabil von II. Art, wenn nicht allen durch beliebige Störungen verursachten Schwingungen diese Eigenschaft zukommt.

Berücksichtigt man noch, daß nach Satz III (19) $s_i = e^{r_i} = e^{\alpha_i} \cdot e^{i\beta_i}$ ist, wobei s_i die Wurzeln der zum System (1) in § 1 gehörigen Fundamentalgleichung $A(s) = 0$ bedeuten, daß also die Stabilitätsbedingung $\alpha_i \leqq 0$ in Bezug auf die Größen s_i die Gestalt

$$|s_i| \leqq 1$$

annimmt, so können wir die letzten Ergebnisse in dem Satz aussprechen:

Satz IV.

Ist die Periode ω der Koeffizienten des Systems (1) linearer Differentialgleichungen positiv reell, dann sind die hinreichenden Bedingungen für die Stabilität der Lösungen die, daß alle Wurzeln der Fundamentalgleichung $A(s) = 0$ im Einheitskreise liegen: $|s_i| < 1$. Für eine Stabilität der ersten Art ist diese Bedingung auch notwendig. Dagegen bleibt die allgemeine Lösung auch dann noch stabil, wenn für die s_i die Bedingung erfüllt ist $|s_i| \leqq 1$, und alle zugehörigen Elementarteiler der Gleichung $A(s) = 0$ einfach sind. Doch ist die Stabilität dann von zweiter Art, sobald einmal $|s_i| = 1$ wird.

Zur Erläuterung der eingeführten Unterscheidung der Stabilität I. und II. Art mag noch folgende Bemerkung dienen.

Betrachten wir in dem System (1) des § 1 die periodischen Koeffizienten $\varphi_{ik}(t)$ vorübergehend als stetige Funktionen eines Parameters λ, dann sind nach einem Satze der Theorie der Differentialgleichungen alle Lösungen, die durch von λ unabhängige Anfangswerte festgelegt sind, ebenfalls stetige Funktionen von λ, und dasselbe gilt somit für die Fundamentalgleichung $A(s)$. Daraus folgt aber, daß auch die Wurzeln dieser Gleichung stetig von λ abhängen und daß

z. B. eine Wurzel, die für $\lambda = \lambda_0$ im Innern des Einheitskreises liegt, für die λ_0 benachbarten Werte von λ weiter im Innern des Einheitskreises liegen wird. Nach § 2 Satz IV können wir daher sagen:

Sind die Lösungen des Systems (1) linearer Differentialgleichungen, deren Koeffizienten periodische Funktionen in t und stetige Funktionen in λ sind, für einen Wert λ_0 stabil von I. Art, dann gibt es ein ε, sodaß für alle λ, für die $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, noch Stabilität I. Art besteht.

Es versteht sich von selbst, daß für Stabilität II. Art ein solcher Satz nicht besteht.

Bezeichnen wir ein instabiles Lösungssystem unserer Differentialgleichungen, für das mindestens eine Wurzel der Fundamentalgleichung $A(s) = 0$ außerhalb des Einheitskreises liegt, als instabil von I. Art, im andern Falle als instabil von II. Art, so können wir entsprechend behaupten:

Ist ein Lösungssystem des Systems (1) linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten, die stetige Funktionen des Parameters λ sind, für $\lambda = \lambda_0$ instabil I. Art, dann gibt es ein ε sodaß für alle λ, für die $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, noch Instabilität I. Art besteht.

§ 3. Die Fundamentalgleichung $A(s) = 0$. Das transformierte System.

a) Allgemeine Methode zur Berechnung der Gleichung $A(s) = 0$.

Die letzten Betrachtungen zeigen, daß die Stabilitätsfrage der Lösungen von Systemen linearer Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten zurückgeführt ist auf die Wurzeldiskussion einer algebraischen Gleichung, der Fundamentalgleichung $A(s) = 0$ des Systemes (1). Es wird sich also darum handeln, diese Gleichung aus den Koeffizienten des Systems (1) zu berechnen. Hierzu kann zunächst eine Methode dienen, die unmittelbar auf die Definition dieser Gleichung in (8) zurückgeht. Man braucht hierzu das Koeffizientensystem, durch das sich irgend ein Fundamentalsystem von (1), etwa das System (3) der $f_{hk}(t)$, bei Argumentvermehrung um ω substituiert. Ein solches Fundamentalsystem kann man sich aus dem System (1) durch Reihenentwicklung aber immer verschaffen. Bestimmt man dann $f_{hk}(t)$ durch die Anfangsbedingungen

$$f_{hk}(0) = 0 \text{ für } h \neq k$$
$$= 1 \text{ für } h = k, \text{ so liefert Gleichung (5)}$$

in § 1 für $t = \omega$:

$$f_{hk}(\omega) = A_{kh}{}^{*})$$

Die Berechnung der Größen A_{kh} auf diesem Wege ist indessen mühsam und gestattet nur in seltenen Fällen eine Diskussion der Fundamentalgleichung. Man hat sich daher nach andern Methoden umzusehen. Solche erhält man, indem man eine konforme Abbildung benützt, durch die die komplexe Zahlenebene des Argumentes t bezogen wird auf eine Ebene z, die neue Argumentebene. Die Differentialgleichungen bleiben bei dieser Substitution linear, das Studium der Integrale bei Argumentvermehrung um ω wird indessen zurückgeführt auf das Studium der Integrale beim Umlauf um gewisse singuläre Punkte.

b) Das transformierte Differentialgleichungssystem.

Die Abbildung, die dies leistet, ist

$$z = e^{\frac{2\pi i}{\omega} t}. \tag{20}$$

Sie bildet jeden Periodenstreifen der t-Ebene konform und umkehrbar eindeutig auf die schlichte $z = re^{i\varphi}$-Ebene ab, die durch das Intervall $o \leqq \varphi < 2\pi$ bestimmt ist. Man sieht dies sofort, wenn man

$$t = x + iy, \text{ also:}$$

$$z = re^{i\varphi} = e^{\frac{-2\pi y}{\omega}} e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \text{ setzt. Auch schließt}$$

man hieraus, daß bei der Abbildung jeder Strecke des Streifens, die parallel zur Strecke (o, ω) liegt, ein Kreis um den Nullpunkt entspricht. Geht man in der Richtung von ω aus dem Streifen heraus, so läuft der Bildpunkt so oft im Kreise um den Nullpunkt, als man in der t-Ebene Periodenstreifen durchwandert. Weiter ist ersichtlich, daß die Punkte der reellen Achse der t-Ebene auf den Einheitskreis der z-Ebene bezogen werden, die Punkte der oberen t-Halbebene $(y > o)$ in das Innere des Einheitskreises, die Punkte der unteren t-Halbebene $(y < o)$ in das Äußere desselben abgebildet werden.

Wir führen die Substitution (20) in das System (1) ein; man hat:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{d\psi}{dz} \cdot e^{\frac{2\pi i t}{\omega}} \cdot \frac{2\pi i}{\omega} = \frac{d\psi}{dz} \cdot z \cdot \frac{2\pi i}{\omega}, \tag{21}$$

das System (1) wird:

*) Charlier, Mechanik des Himmels Bd. I.

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dz}\cdot z\dfrac{2\pi i}{\omega} = \bar{\varphi}_{11}(z)\,\psi_1 + \cdots\cdots + \bar{\varphi}_{1n}(z)\,\psi_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d\psi_n}{dz}\cdot z\dfrac{2\pi i}{\omega} = \bar{\varphi}_{n1}(z)\,\psi_1 + \cdots\cdots + \bar{\varphi}_{nn}(z)\,\psi_n \end{cases}$$

Hierbei ist $\bar{\varphi}_{ik}(z)$ für $\varphi_{ik}\left(\frac{\omega}{2\pi i}\log z\right)$ gesetzt.

Nun haben wir vorausgesetzt, daß $\varphi_{ik}(t)$ periodische Funktionen in t sind d. h. ungeändert bleiben, wenn man t um ω vermehrt. Wird aber t um ω vermehrt, dann macht z einen Umlauf um den Nullpunkt und umgekehrt. Wir schließen daher, daß, die $\bar{\varphi}_{ik}(z)$ bei einem Umlauf von z um den Nullpunkt ungeändert bleiben, mit anderen Worten eindeutige Funktionen von z sind. Man sieht dies auch analytisch ein; es ist

$$\log z = \log|z| + i\,\text{arcus}\,z.$$

Läßt man also in dem Argument von $\bar{\varphi}_{ik}$ d. h. in $\frac{\omega}{2\pi i}\log z$ den arcus um 2π wachsen, dann vermehrt sich das Argument von φ_{ik} um die Periode ω.

Das Studium der Integrale vom System (1) bei Argumentvermehrung um ω ist somit in der Tat zurückgeführt auf das Studium der Integrale von (22) beim Umlauf um den Nullpunkt.

Für das letztere Problem ist aber die allgemeine Form der Integrale durch die Untersuchungen von Fuchs und Hamburger aufgestellt worden. Durch eine ebenfalls auf der Theorie linearer Substitutionen fußende Betrachtung der Lösungen in ihrem Verhalten beim Umlauf in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet gelingt es Fuchs und Hamburger sogenannte kanonische Fundamentalsysteme nachzuweisen, d. h. Systeme, die beim Umlauf im betrachteten Gebiet in besonders einfacher Weise sich substituieren. Und zwar ist das besondere Verhalten dieser Lösungssysteme bestimmt durch die Beschaffenheit der Wurzeln einer zu dem betreffenden Gebiet gehörigen algebraischen Gleichung, der Fundamentalgleichung der Substitution. Ist das betrachtete Gebiet ein Kreisring, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist, und ist $\bar{A}(s) = 0$ die Fundamentalgleichung, so weisen Fuchs und Hamburger zu jedem Elementarteiler $(s-\bar{s}_i)^\nu$ ein Lösungssystem der Gleichung (22) von folgender Beschaffenheit nach:

$$
(23)\quad \begin{cases}
\bar{\Psi}_{\mathrm{hi}_1}(z) = z^{\bar{r}_i}\,\bar{\Phi}_{\mathrm{hi}_1}(z) \\
\bar{\Psi}_{\mathrm{hi}_2}(z) = z^{\bar{r}_i}\,(\bar{\Phi}_{\mathrm{hi}_2}(z) + \bar{\Phi}_{\mathrm{hi}_{21}}(z)\log z) \\
\bar{\Psi}_{\mathrm{hi}_3}(z) = z^{\bar{r}_i}\,(\bar{\Phi}_{\mathrm{hi}_3}(z) + \bar{\Phi}_{\mathrm{hi}_{31}}(z)\log z + \bar{\Phi}_{\mathrm{hi}_{32}}(z)\log^2 z) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\bar{\Psi}_{\mathrm{hi}_\nu}(z) = z^{\bar{r}_i}\,(\bar{\Phi}_{\mathrm{hi}_\nu}(z) + \bar{\Phi}_{\mathrm{hi}_{\nu,1}}(z)\log z + \cdots\cdots + \bar{\Phi}_{\mathrm{hi}_{\nu,\nu-1}}(z)\log z^{\nu-1}).
\end{cases}
$$

Hierbei sind die $\bar{\Phi}_{\mathrm{hi}_{k,l}}(z)$ im Kreisring eindeutige analytische Funktionen, die im allgemeinsten Falle durch Laurent'sche Reihen dargestellt werden können. Und die Größen $\bar{s}_i$ und $\bar{r}_i$ hängen durch die Gleichungen zusammen:

$$
(24)\qquad \bar{s}_i = e^{2\pi i \bar{r}_i}.
$$

Geht man nun von diesem Lösungssystem (23) der Gleichungen (22) durch die Substitution

$$
z = e^{\frac{2\pi i t}{\omega}}
$$

zu dem Lösungssystem der Gleichungen (1) über, so erhält man genau das System (19), das bereits als Form der Integrale der Gleichungen (1) aufgestellt wurde.

c) Stabilitätsbedingung für die Wurzeln der Gleichung $\bar{A}(\bar{s}) = 0$ des transformierten Systems.

Aus den Stabilitätsbedingungen des Satzes IV können wir sofort andere ableiten, die sich auf die Wurzeln der Gleichung $\bar{A}(\bar{s}) = 0$ beziehen. Wie in § 2 wird man schließen, daß zur Stabilität notwendig und hinreichend ist, daß die Partikularintegrale (23) endlich bleiben, wenn t von 0 bis ∞ variiert. Man sieht, daß dies jedenfalls der Fall, wenn in $\bar{r}_i = \bar{\alpha}_i + i\bar{\beta}_i$ der imaginäre Teil $\bar{\beta}_i > 0$; denn dann geht der Faktor $z^{\bar{r}_i t} = e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\bar{\alpha}_i + i\bar{\beta}_i)t}$ aller Partikularintegrale (23) mit wachsendem t sicher gegen Null. Nun ist aber nach Gleichung (24)

$$
\bar{s}_i = e^{2\pi i \bar{r}_i} = e^{2\pi(\bar{\alpha}_i \cdot i - \bar{\beta}_i)},
$$

die hinreichende Stabilitätsbedingung lautet demnach auch für die $\bar{s}_i$

$$
|\bar{s}_i| < 1.
$$

Analog wie beim Beweise des Satzes IV ergeben sich die übrigen Behauptungen des Satzes

Satz V:

Ist die Periode ω der Koeffizienten des Systems (1) linearer Differentialgleichungen positiv reell, dann ist die hinreichende Bedingung dafür, daß die Lösungen des Systems (1) stabil sind, die, daß sämtliche Wurzeln der Fundamentalgleichung $A(s) = 0$. die im transformierten System (22) zum Umlauf um den Nullpunkt längs des Einheitskreises gehört, im Einheitskreise liegen. Für eine Stabilität I. Art ist diese Bedingung auch notwendig, doch ist die Lösung auch dann noch stabil, wenn die zu einfachen Elementarteilern gehörigen $|\bar{s}_i| \leqq 1$ sind; die Stabilität ist im letzteren Falle von der II. Art. sobald einmal $|\bar{s}_i| = 1$.

d) Bildung der Fundamentalgleichung $\bar{A}(\bar{s}) = 0$.

Das Problem der Aufstellung der Fundamentalgleichung $\bar{A}(s) = 0$ ist durch die Arbeiten von Frobenius, Fuchs, Hamburger, Poincaré, Koch, Hill u. a. gelöst. Am einfachsten gestaltet sich die Berechnung, wenn das transformierte System im Einheitskreis und auf demselben bez. außerhalb des Einheitskreises und auf demselben nur Stellen der Bestimmtheit hat. Da diese beiden Fälle durch die Transformation $z = \frac{1}{x}$ ineinander übergeführt werden, so beschränken wir uns auf den ersteren und besprechen unter Voraussetzung der Ergebnisse der Fuchsschen Theorie die beiden Möglichkeiten:

A. Es ist $z = 0$ allein singuläre Stelle der Bestimmtheit.

B. Es liegen außer $z = 0$ noch andere Bestimmtheitsstellen im Einheitskreis.

A. Damit $z = 0$ singuläre Stelle der Bestimmtheit ist, ist nach Fuchs hinreichend, daß die Funktionen $\varphi_{ik}(z)$ des Systems (22) für $z = 0$ regulär sind. Ist dies der Fall und setzt man

$$(25) \qquad \ldots \frac{\omega}{2\pi i} \cdot \bar{\varphi}_{ik}(z) = a_{ik} + a_{ik}' z + a''_{ik} z^2 + \ldots \ldots,$$

so genügen nach Fuchs die oben mit $\bar{r}$ bezeichneten Größen der determinierenden Gleichung:

$$(26) \qquad F(\bar{r}) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \bar{r}, a_{12}, \ldots \ldots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots \ldots \ldots a_{nn} - \bar{r} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Beziehung zwischen den $\bar{r}$ und den Wurzeln der zum Umlauf um den Nullpunkt gehörigen Fundamentalgleichung $\bar{A}(\bar{s}) = 0$ ist hierbei die sehr einfache

(26) $$\bar{s} = e^{2\pi i \bar{r}}.$$ *)

Den komplizierteren Zusammenhang zwischen den Wurzeln der Gleichung $F(\bar{r}) = 0$ und den Elementarteilern der Fundamentalgleichung $\bar{A}(\bar{s}) = 0$, von welch letzteren ja im wesentlichen die Form der Lösungen an der Stelle $z = 0$ — d. h. hier im ganzen Einheitskreise und auch auf dem Rande desselben — und weiterhin die Stabilität abhängt, dürfen wir als bekannt voraussetzen.**) Wir begnügen uns, zwei wichtige Fälle anzuführen, in denen die Beschaffenheit der Elementarteiler aus der Beschaffenheit der Wurzeln der determinierenden Gleichung $\bar{F}(\bar{r}) = 0$ zu entnehmen ist:

1. Sind alle Wurzeln von $F(\bar{r}) = 0$ einfach und besteht zwischen keinen zwei eine ganzzahlige Differenz, so sind auch alle Wurzeln von $\bar{A}(\bar{s}) = 0$ voneinander verschieden, d. h. alle Elementarteiler einfach.

Die Lösungen von (22) sind von der Form:

(27) $$\bar{\Psi}_{hi}(z) = z^{\bar{r}_i}\, \bar{\Phi}_{hi}(z) \qquad (h, i = 1, 2, \ldots n),$$

wobei $\bar{\Phi}_{hi}(z)$ Potenzreihen in z sind, die im ganzen Einheitskreise konvergieren; die notwendige und hinreichende Stabilitätsbedingung lautet in diesem Falle nach Satz V: $|\bar{s}_i| \leqq 1$ oder in Bezug auf die Wurzeln $\bar{r}_i$, daß der imaginäre Teil für alle $\bar{r}_i$:

(28) ... $$I(\bar{r}_i) \geqq o.$$

2. Ist unter den Wurzeln von $\bar{r}_i$ eine νfache, die sich von keiner anderen um eine ganze Zahl unterscheidet, so ist die entsprechende Wurzel $\bar{s}_i$ ebenfalls eine νfache und $(\bar{s} - \bar{s}_i)$ zugleich νfacher Elementarteiler. Die Lösungen, die zu dieser Wurzelgruppe gehören, sind jetzt von der Form:

(29) $$\bar{\Psi}_{hi_\mu}(z) = z^{\bar{r}_i}\left[\bar{\Phi}_{hi_\mu}(z) + (\mu - 1)\,\bar{\Phi}_{hi_{\mu-1}}(z)\log z + \cdots\cdots \bar{\Phi}_{hi_1}(z)\,(\log z)^{\mu-1}\right]$$

und die notwendige und hinreichende Stabilitätsbedingung für diese Wurzel ist:

(30) $$\begin{cases} |\bar{s}_i| < 1, \text{ bez.} \\ I(\bar{r}_i) > o. \end{cases}$$

Kommen ganzzahlige Differenzen zwischen den Wurzeln $\bar{r}_i$ vor so ist die Frage nach dem Grade der Elementarteiler von $\bar{A}(s) = o$ aus den Wurzeln der Gleichung $F(\bar{r}) = o$ allein bekanntlich nicht zu entscheiden.

---

*) Heffter, Einl. in die Theorie d, lin. Diff. gl. pag. 157 Gl. 16.

**) Heffter, loc. cit. Kap. IX u. XI pag. 157.

Die periodischen Funktionen $\varphi_{ik}(t)$, für die die transformierten Funktionen $\bar{\varphi}_{ik}(z)$ die obige Entwicklung (25) im Einheitskreis und auf demselben zulassen, sind durch eine einfache Eigenschaft ausgezeichnet. Setzt man nämlich in (25) $z = e^{\frac{2\pi i}{\omega} t}$, so folgt:

$$31) \ldots \quad \varphi_{ik}(t) = \frac{2\pi i}{\omega}\left[a_{ik} + a'_{ik}\left(\cos\frac{2\pi i}{\omega} t + i \sin\frac{2\pi i}{\omega} t\right) + \cdots \right],$$

und da nach unserer konformen Abbildung das Innere des Einheitskreises der z Ebene auf die obere $t = x + iy$ Ebene bezogen wird, wobei der Umgebung des Nullpunktes der z Ebene die Umgebung des ∞ fernen Punktes entspricht, soweit dieselbe durch die obere t Halbebene begrenzt ist, so folgt, daß die letztere Entwicklung der Funktionen $\varphi_{ik}(t)$ in der ganzen oberen t Halbebene, inkl. $y = o$, Gültigkeit haben muß. Umgekehrt folgt aus der Darstellung (31) sofort die Entwicklung (25) für die Funktionen $\bar{\varphi}_{ik}(z)$, und demnach ergeben sich als Bedingungen dafür, daß die Stabilität nach der soeben besprochenen Methode erkannt werden kann, die beiden Forderungen:

1. Jede der Funktionen $\varphi_{ik}(t)$ muß in der ganzen oberen t Halbebene, abgesehen von der Stelle $t = \infty$ frei von singulären Stellen sein und

2. Jede der Funktionen $\varphi_{ik}(t)$ muß, wenn t in der oberen t Halbebene in einem Periodenstreifen ins Unendliche geht, unabhängig vom Wege einem endlichen Grenzwert zustreben.

Da die singulären Stellen einer Funktion im allgemeinen als bekannt betrachtet werden, so wird es, um gegebenen Falles zu entscheiden, ob die Stabilität nach der Fuchs'schen Methode untersucht werden kann, nur darauf ankommen, festzustellen, wann die zweite Forderung erfüllt ist. Ein Kriterium hierfür läßt sich allgemein nicht aufstellen, doch kann man eine ausgedehnte Klasse von Funktionen angeben, bei denen die Bedingungen vorhanden sind.

Sind nämlich die $\varphi_{ik}(t)$ rationale Ausdrücke in sin at, cos at, und fragen wir uns, inwieweit für solche Funktionen die in Rede stehende Forderung erfüllt ist, so ist diese Frage leicht zu beantworten, indem man durch die Substitution $z = e^{\frac{2\pi i}{\omega} t}$ die $\varphi_{ik}(t)$ in rationale Ausdrücke in z verwandelt. Hier ist:

$$\omega = \frac{2\pi}{a}; \quad z = e^{ait}$$

$$(32)\quad \begin{cases} \cos at = \dfrac{e^{ait}+e^{-ait}}{2} = \dfrac{e^{2ait}+1}{2e^{ait}} = \dfrac{z^2+1}{2z} \text{ und ebenso} \\ \sin at = \dfrac{z^2-1}{2iz}. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in die Funktionen $\varphi_{ik}(t)$, die wir in der Form:

$$(33)\quad \varphi_{ik}(t) = \frac{\alpha_{00}+\alpha_{01}\sin at+\alpha_{10}\cos at+\cdots+\alpha_{0\nu}\sin^{\nu}at+\alpha_{1,\nu-1}\sin^{\nu-1}at\cos at}{\beta_{00}+\beta_{01}\sin at+\beta_{10}\cos at+\cdots+\beta_{0\mu}\sin^{\mu}at+\cdots} \\ \frac{+\cdots+\alpha_{\nu 0}\cos^{\nu}at}{+\beta_{\mu 0}\cos^{\mu}at}$$

annehmen wollen, ein und erweitert Zähler und Nenner in $\varphi_{ik}(t)$ mit $(2z)^{\nu}$ bez. $(2z)^{\mu}$, so erhält man

$$(34)\quad \varphi_{ik}(t) = (2z)^{\mu-\nu}\frac{\alpha_{00}(2z)^{\nu}+(-i)\alpha_{01}(2z)^{\nu-1}(z^2-1)+\alpha_{10}(2z)^{\nu-1}(z^2+1)}{\beta_{00}(2z)^{\mu}+(-i)\beta_{01}(2z)^{\mu-1}(z^2-1)+\cdots} \\ \frac{+\cdots+\alpha_{\nu 0}(z^2+1)^{\nu}}{+\beta_{\mu 0}(z^2+1)^{\mu}}$$

Man sieht, daß dieser Ausdruck an der Stelle $z=0$ regulär ist, wenn $\mu-\nu\geqq 0$ ist und zwar ist:

$$\lim_{z=0}\bar{\varphi}_{ik}(z)=0, \text{ wenn } \mu-\nu>0$$

$$\lim_{z=0}\bar{\varphi}_{ik}(z) = \frac{\alpha_{0\nu}(i)^{\nu}+\alpha_{1,\nu-1}(i)^{\nu-1}+\cdots\alpha_{\nu 0}}{\beta_{0\nu}(i)^{\nu}+\beta_{1,\nu-1}(i)^{\nu-1}+\cdots\beta_{\nu 0}}, \text{ wenn } \mu-\nu=0 \text{ d.h.}$$

Ein System linearer Differentialgleichungen, dessen Koeffizienten rationale Ausdrücke in sin at und cos at sind, wird durch die Substitution $z=e^{iat}$ in ein lineares System übergeführt, dessen Koeffizienten rationale Ausdrücke in z sind. Letzteres hat an der Stelle $z=0$ eine Stelle der Bestimmtheit, wenn der Grad des Zählers in sin at bez. cos at den des Nenners nicht übersteigt.

B) Wir gehen jetzt an die Untersuchung der anderen Möglichkeit, daß außer $z=0$ noch weitere singuläre Stellen der Bestimmtheit im Einheitskreise liegen $(z_1, z_2, \cdots z_{\varrho})$. Eine hinreichende Bedingung hierfür ist, das an diesen sämtlichen singulären Stellen die Funktionen $\bar{\varphi}_{ik}(z)$ nur einfache Pole besitzen. Setzen wir dies voraus, dann kann die Berechnung der Fundamentalgleichung $\bar{A}(\bar{s})=0$ folgendermaßen geschehen:

Man bringe die Gleichungen (1) an der Stelle $z=z_i$ auf die Normalform:

$$(35) \qquad \frac{d\,\psi_k}{dz}(z-z_i) = l_{k1}(z)\,\psi_1 + \cdots + l_{kn}(z)\,\psi_n, \qquad (k = 1, \cdots n)$$

wo: $l_{hk}(z) = \frac{\omega}{2\pi i}\,\frac{z-z_i}{z}\,\bar{\varphi}_{hk}(z)$ gesetzt ist und bilde die zugehörige determinierende Gleichung $F_i(r) = 0$. Die Kenntnis ihrer Wurzeln gestattet, wie unter A) für die Stelle $z = 0$ in zwei speziellen Fällen angegeben wurde, die Aufstellung der allgemeinen Form der Lösungen der betreffenden singulären Stelle analog den in (27) und (29) angeführten Entwicklungen. Aus der Form dieser Entwicklungen kann man sodann weiter die zum Umlauf um die singuläre Stelle gehörige Fundamentalsubstitution $\bar{A}_i$ berechnen; wir verweisen hierfür auf Heffter, Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen, Kap. IX und Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Abschnitt VIII Kap. 2. Sind alle diese Fundamentalsubstitutionen und auch die zu $z = 0$ gehörige $\bar{A}_0$ bekannt, dann findet man durch Multiplikation ihrer Matrizen die Matrix $\bar{A}$ und damit die Fundamentalgleichung $\bar{A}(\bar{s}) = 0$.

e) Beziehung der vorgetragenen Stabilitätstheorie zu der Routh'schen Theorie.

Die in den Sätzen IV und V mitgeteilten Stabilitätskriterien unterscheiden sich von dem von Routh für Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gegebenen rein äußerlich dadurch, daß der Bereich der Ebene der Wurzeln, innerhalb dessen man auf Stabilität schließen konnte, in beiden Kriterien ein verschiedener ist: Bei Routh wird von den Wurzeln verlangt, daß dieselben im Stabilitätsfalle in der linken Halbebene liegen; nach den Kriterien IV und V hingegen müssen im gleichen Falle die Wurzeln im Einheitskreise sich befinden.

Um den Zusammenhang zwischen beiden Kriterien klarzulegen, besonders um das Verhältnis der verschiedenen zu Grunde gelegten algebraischen Gleichungen aufzudecken, werden wir die vorgetragene Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten — in ihrem Gedankengang — für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten wiederholen. Es wird sich hierbei von selbst der Anschluß an die gewöhnliche Theorie der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ergeben.

Zu diesem Zwecke fassen wir die konstanten Koeffizienten des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$(36)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dt} = a_{11}\psi_1 + \cdots\cdots a_{1n}\psi_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d\psi_n}{dt} = a_{n1}\psi_1 + \cdots\cdots a_{nn}\psi_n \end{cases}$$

als periodische Funktionen mit der beliebigen Periode ω auf und schließen wie früher, daß, wenn $\psi_1(t)\cdots\cdots\psi_n(t)$ ein beliebiges Lösungssystem von (36), ist $\psi_1(t+\omega),\cdots\cdots\psi_n(t+\omega)$ ebenfalls ein solches ist. Die Fundamentalsubstitution, die beide Lösungssysteme verbindet, liefert uns die Fundamentalgleichung $A(s) = 0$, von deren Wurzeln und Elementarteilern die Form der Lösungen abhängig ist. Die Sätze (I—III) sind unmittelbar zu übertragen; man erhält auch hier Lösungen der Gestalt (19), nur daß die Funktionen Φ nun periodische Funktionen der beliebigen Periode ω d. h. Konstante sind. Es erübrigt nur zu zeigen, daß die Größen r_i, die in den Exponentialfaktoren der allgemeinen Lösung auftreten, eindeutig bestimmte Größen sind.

Um letzteres nachzuweisen, gehen wir von (36) durch die Substitution $z = e^{\frac{2\pi i}{\omega}t}$ zu dem transformierten System über:

$$(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dz}\cdot z\dfrac{2\pi i}{\omega} = a_{11}\psi_1 + \cdots\cdots a_{1n}\psi_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d\psi_n}{dz}\, z\dfrac{2\pi i}{\omega} = a_{n1}\psi_1 + \cdots\cdots a_{nn}\psi_n, \end{cases}$$

das, wie man sieht, in der ganzen Ebene nur die Stelle $z = o$ als singuläre Stelle und zwar als Bestimmtheitsstelle hat.

Nennen wir $\frac{\omega}{2\pi i}\varrho_i = \bar{r}_i$ die Wurzeln der zur Stelle $z = o$ gehörigen determinierenden Gleichung:

$$F(\bar{r}) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\omega}{2\pi i}a_{11} - \bar{r}, \frac{\omega}{2\pi i}a_{12}, \cdots\cdots \frac{\omega}{2\pi i}a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\omega}{2\pi i}a_{n1}, \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{\omega}{2\pi i}a_{nn} - \bar{r} \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. sind die ϱ_i die Wurzeln der Gleichung:

$$\triangle(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho, \cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, \cdots\cdots\cdots a_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

dann lauten nach (26) die Wurzeln der zum System (37) gehörigen Fundamentalgleichung $\bar{A}(\bar{s}) = 0 : \bar{s} = e^{\varrho\omega}$, und die zu einem νfachen Elementarteiler $\left(\frac{\omega}{2\pi i}(\varrho - \varrho_i)\right)^{\nu}$ der Gleichung $F(\bar{r}) = 0$ bez. zu einem νfachen Elementarteiler $(\varrho - \varrho_i)^{\nu}$ der Gleichung $\triangle(\varrho) = 0$ gehörige Lösungsgruppe hat die Form:

$$\psi_{hi_1} = e^{\varrho_i t} \cdot C_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_{hi_\nu} = e^{\varrho_i t}(C_\nu + C_{\nu,1}t + \cdots C_{\nu,\nu-1}t^{\nu-1}),$$

wobei die C Konstante sind.

Diese Gestalt der Lösungen, sowie die Gleichung $\triangle(\varrho) = 0$ hat Routh bei seinen Stabilitätsuntersuchungen als Ausgangspunkt genommen. Wir können ohne weiteres das Ergebnis dieser Theorie formulieren:

Damit die Lösungen des Systems linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten stabil sind, ist hinreichend, daß alle Wurzeln der Gleichung $\triangle(\varrho) = o$ einen reellen Teil kleiner als Null haben. Sind die zur Wurzel ϱ_i gehörigen Elementarteiler zum Teil mehrfach, dann ist die Bedingung auch notwendig; im andern Falle ist auch dann noch Stabilität vorhanden, wenn die reellen Teile von ϱ_i $R(\varrho_i) \leqq 0$ sind, doch ist die Stabilität dann von zweiter Art, sobald einmal $R(\varrho_i) = 0$ wird.

II. Teil: Anwendungen.

§ 4. Zwei einfache Beispiele.

Um zunächst an einem ganz einfachen Fall die oben entwickelte Theorie zu erläutern, betrachten wir die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\alpha^2 \cos at}{1 + \cos at} y = 0. \tag{1}$$

Die Substitution:

$$z = e^{ait}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -z^2 a^2 \frac{d^2y}{dz^2} - za^2 \frac{dy}{dz}$$

führt die Gleichung (1) in eine Gleichung mit rationalen Koeffizienten in z über:

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + \frac{\alpha^2}{a^2} \frac{z^2 + 1}{(z+1)^2} y = 0, \tag{2}$$

die, wie man schon aus Gleichung (1) nach dem in § 3 angegebenen Kriterium hätte erkennen können, an der Stelle $z = 0$ eine singuläre Stelle der Bestimmtheit besitzt. Die determinierende Gleichung daselbst:

$$F(\bar{r}) = \bar{r}(\bar{r} - 1) + \bar{r} + \frac{\alpha^2}{a^2} = 0$$

liefert die Verzweigungsexponenten der Integrale von (2)

$$\bar{r}_1 = \frac{\alpha i}{a}; \quad \bar{r}_2 = -\frac{\alpha i}{a}.$$

Nach der Fuchsschen Theorie schließt man auf ein kanonisches Fundamentalsystem an der Stelle $z = 0$, das die Form hat:

$$y_1 = z^{\frac{\alpha i}{a}} \varphi_1(z)$$

$$y_2 = z^{\frac{-\alpha i}{a}} \varphi_2(z),$$

wobei φ_1, φ_2 Potenzreihen in z sind, die sicher im Innern desjenigen Kreises konvergieren, der durch die $z = 0$ nächst gelegene singuläre Stelle der Differentialgleichung geht. Nun liegt zwar diese singuläre Stelle $z = -1$ auf dem Einheitskreis, doch kann man, da dieselbe für die Differentialgleichung eine Stelle der Bestimmtheit ist, leicht zeigen, daß die Reihen auch auf dem Einheitskreis konvergieren. Bringt man nämlich die Gleichung (2) an der Stelle $z = -1$ auf die Normalform:

$$\frac{d^2y}{dz^2}(z+1)^2 + \frac{dy}{dz}(z+1)\cdot\frac{(z+1)}{z} + \frac{\alpha^2}{a^2}\frac{z^2+1}{z^2}y = 0$$

und bildet für $z = -1$ die determinierende Gleichung:

$$\bar{r}(\bar{r}-1) + \frac{2\alpha^2}{a^2} = 0,$$

so erhält man als Wurzeln

$$\bar{r}_{11} = {}^1/_2\left(1 + \sqrt{1 - \frac{8\alpha^2}{a^2}}\right);\quad \bar{r}_{12} = {}^1/_2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{8\alpha^2}{a^2}}\right).$$

Da diese beiden positiven reellen Teil haben, so ist nach einem Satze von Thomé*) jede der Reihen φ_1 und φ_2 in allen Punkten des Einheitskreises konvergent. Wir schließen demnach, daß die allgemeine Lösung der Gleichung (1) die Gestalt hat:

$$y_1 = c_1 e^{-\alpha t}\varphi_1(e^{iat}) + c_2 e^{+\alpha t}\varphi_2(e^{iat})$$

und somit *für alle Werte von α instabil von der II. Art* ist.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Gleichung:

$$(3)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{a + b\cos t}{c + d\cos t}\frac{dy}{dt} + \frac{a' + b'\cos t}{c' + d'\cos t}y = 0,$$

in der alle Konstanten reell, c, c′ positiv, d, d′ $\neq$ o und $c > d$, $c' > d'$ vorausgesetzt sind. Sie geht durch die Substitution: $z = e^{it}$ über in die Gleichung:

$$z^2\cdot\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz}\left[1 - i\frac{2za + b(z^2+1)}{2zc + d(z^2+1)}\right] - y\frac{2za' + b'(z^2+1)}{2zc' + d'(z^2+1)} = 0,$$

die im Einheitskreis die singulären Stellen der Bestimmtheit

$$z_0 = 0;\ z_1 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - d^2}}{d};\ z_2 = \frac{-c' - \sqrt{c'^2 - d'^2}}{d'}$$

besitzt.

*) Siehe Schlesinger, Handbuch d. Theorie d. lin. Diff. gl. pag. 228.

Wir bilden an diesen Stellen die determinierende Gleichung und berechnen die zugehörigen Fundamentalsubstitutionen S_0, S_1, S_2.

Die determinierende Gleichung der Stelle $z = 0$ ist

$$F_0(\bar{r}) = \bar{r}(\bar{r}-1) + \bar{r}\left(1 - i\frac{b}{d}\right) - \frac{b'}{d'} = \bar{r}^2 - i\frac{b}{d}\bar{r} - \frac{b'}{d'} = 0$$

und liefert die Verzweigungsexponenten:

$$\bar{r}_{01} = \frac{ib}{2d} + \sqrt{\frac{b'}{d'} - \frac{b^2}{4d^2}}; \quad \bar{r}_{02} = \frac{ib}{2d} - \sqrt{\frac{b'}{d'} - \frac{b^2}{4d^2}}$$

die uns berechtigen, auf ein kanonisches Fundamentalsystem der Gestalt:

$$y_1 = z^{\bar{r}_{01}}\varphi_1(z); \; y_2 = z^{\bar{r}_{02}}(\varphi_2(z) + \gamma \cdot \varphi_1(z)\log z)$$

zu schließen, wobei φ_1, φ_2 Potenzreihen nach z bedeuten und der mit log z behaftete Teil von y_2 wegfällt, wenn $\bar{r}_{01} - \bar{r}_{02}$ nicht ganzzahlig ist. Wir entnehmen daraus die Matrix der Fundamentalsubstitution:

$$S_0 \equiv \begin{pmatrix} e^{2\pi i \bar{r}_{01}}, & 0 \\ \gamma \cdot 2\pi i \cdot e^{2\pi i \bar{r}_{02}}, & e^{2\pi i \bar{r}_{02}} \end{pmatrix},$$

wo γ eine Konstante ist, die nur dann $\neq 0$, wenn $\bar{r}_{01} = \bar{r}_{02}$ ist.

Die determinierende Gleichung an der Stelle $z = z_1$ und ebenso die an der Stelle $z = z_2$ ist:

$F_1(\bar{r}) = F_2(\bar{r}) = \bar{r}(\bar{r}-1) = 0$. Sie gibt für beide Stellen die Verzweigungsexponenten

$\bar{r}_1 = 0$; $\bar{r}_2 = 1$, so daß die kanonischen Fundamentalsysteme in jedem Falle die Gestalt haben:

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_{11}(z - z_1) \\ y_2 &= (z - z_1)[\varphi_{12}(z - z_1) + \alpha \cdot \log(z - z_1)\varphi_{11}(z - z_1)] \\ y_1 &= \varphi_{21}(z - z_2) \\ y_2 &= (z - z_2)[\varphi_{22}(z - z_2) + \beta \log(z - z_2)\varphi_{21}(z - z_2)] \end{aligned}$$

dabei bedeuten die φ Potenzreihen nach $z - z_1$ bezw. $z - z_2$ und α, β sind Konstante, die möglicherweise gleich Null sein können. Wir entnehmen aus der Form der Fundamentalsysteme die Matrizen ihrer Fundamentalsubstitutionen:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & , & 0 \\ \alpha \cdot 2\pi i \cdot e^{2\pi i}, & & e^{2\pi i} \end{pmatrix}; \; S_2 = \begin{pmatrix} 1 & , & 0 \\ \beta \cdot 2\pi i \cdot e^{2\pi i}, & & e^{2\pi i} \end{pmatrix}$$

Die aus S_0, S_1, S_2, komponierte Matrix

$S_0 S_1 S_2 = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \bar{r}_{01}}, & 0 \\ c & , \; e^{2\pi i(2+\bar{r}_{02})} \end{pmatrix}$ liefert somit nach § 3 die zum Umlauf auf dem Einheitskreis gehörige Fundamentalgleichung:

$$\bar{A}(\bar{s}) = \begin{vmatrix} e^{2\pi i \bar{r}_{01}} - \bar{s}, & 0 \\ c & , \; e^{2\pi i (2+\bar{r}_{02})} - \bar{s} \end{vmatrix} = 0$$

mit den Wurzeln:

$$\bar{s}_1 = e^{2\pi i \bar{r}_{01}}; \quad \bar{s}_2 = e^{2\pi i (2+\bar{r}_{02})}$$

Wir untersuchen die möglichen Werte von $|\bar{s}_1|$ und $|\bar{s}_2|$. Wir nehmen erst an, daß $b \neq 0$ sei und betrachten die drei Fälle:

$$\triangle = \frac{b'}{d'} - \left(\frac{b}{2d}\right)^2 \gtrless 0$$

Ist (1) $\triangle > 0$, so ist der reelle Teil von $i\bar{r}_{01}$, bez. $i\bar{r}_{02}$

$$R(i\bar{r}_{01}) = R(i\bar{r}_{02}) = -\frac{b}{2d} < 0, \text{ wenn } bd > 0$$
$$> 0, \text{ wenn } bd < 0$$

d. h. $|s_1| = |s_2| < 1$, wenn $bd > 0$
> 1, wenn $bd < 0$.

Ist (2) $\triangle < 0$, so werden $i\bar{r}_{01}$ und $i\bar{r}_{02}$ reell und zwar ist

$$i\bar{r}_{01} = -\frac{b}{2d} - \sqrt{\left(\frac{b}{2d}\right)^2 - \frac{b'}{d'}} < 0, \text{ wenn } bd > 0$$
$$> 0, \text{ wenn } bd < 0 \text{ und zugleich } b'd' > 0$$
$$\leqq 0, \text{ wenn } bd < 0 \text{ und zugleich } b'd' \leqq 0$$

$$i\bar{r}_{02} = -\frac{b}{2d} + \sqrt{\left(\frac{b}{2d}\right)^2 - \frac{b'}{d'}} < 0, \text{ wenn } bd > 0 \text{ und } b'd' > 0$$
$$> 0, \text{ wenn } bd > 0 \text{ und } b'd' < 0$$
$$> 0, \text{ wenn } bd < 0$$
$$= 0, \qquad \text{wenn } b'd' = 0$$

Ist endlich: (3) $\triangle = 0$, so ist:

$$i\bar{r}_{01} = i\bar{r}_{02} < 0, \text{ wenn } bd > 0$$
$$> 0, \text{ wenn } bd < 0$$

Wir nehmen zweitens an, daß $b = 0$ sei. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} i\bar{r}_{01} &= -i\sqrt{\frac{b'}{d'}} \\ i\bar{r}_{02} &= +i\sqrt{\frac{b'}{d'}} \end{aligned}\right\} \text{daher imaginär, wenn } b'd' > 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{dagegen ist } i\bar{r}_{01} \text{ negativ reell} \\ &\qquad\quad i\bar{r}_{02} \text{ positiv } \quad \text{„} \end{aligned}\right\} \text{wenn } b'd' < 0.$$

Zusammenfassend können wir also sagen:
Die Lösung der Gleichung (3) ist, wenn $b \neq 0$ und

(1) $\triangle = \frac{b'}{d'} - \left(\frac{b}{2d}\right)^2 \geqq 0$ stabil I. Art, sobald $bd > 0$
instabil I. Art, sobald $bd < 0$

(2) Δ < 0 stabil I. Art, sobald $bd > 0$ und $b'd' > 0$,
stabil II. Art, sobald $bd > 0$ und $b'd' = 0$,
instabil I. Art, in jedem anderen Falle.

Ist hingegen $b = 0$, so ist die Lösung stabil II. Art, sobald $b'd' > 0$,
instabil I. Art, sobald $b'd' < 0$.

§ 5. Stabilität eines auf elastischer Unterlage rotierenden Motors.

Ein praktisches Beispiel, in dem die im I. Teil der Arbeit entwickelte Theorie zur Geltung kommt, liegt vor bei einem rotierenden Motor, der auf einem elastischen Fundament befestigt ist. In der Literatur ist die hier auftretende Stabilitätsfrage nur mit gewissen Vernachlässigungen behandelt worden. Siehe:

F. Radakovic, Zeitschr. f. Math. Phys. 48.

A. Sommerfeld, Phys. Zeitschr. 1901 pag. 266, 268.

Das Schema der in Rede stehenden Bewegung ist das folgende:

Die Masse M rotiert frei von eingeprägten Kräften um die Achse A. Diese ist auf einer elastischen Unterlage F gelagert, d. h. F steht unter dem Einfluß einer Kraft, die der vertikalen Elongation aus der Gleichgewichtslage proportional ist.

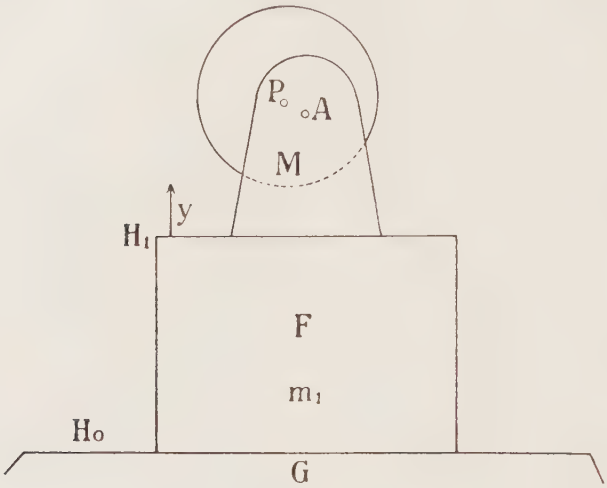
Erläuterung:

Die Abwesenheit von Kräften ist so zu verstehen, daß wir annehmen, Antriebs- und Widerstandskräfte des Motors würden sich gerade aufheben, so daß gleichförmige Rotation möglich wäre, wenn keine elastische Unterlage da wäre. Die Elastizität der Unterlage ist so zu denken:

Das elastische Fundament F, das den Motor trägt, ruht seinerseits auf einer starren Unterlage G. Durch die Bewegung des Motors werden die Punkte des Fundaments F in Schwingungen versetzt, die auf H aufliegenden (H_0) mit der Elongation null, die obengelegenen (H_1) mit der Elongation y. (Fig. 1).

Ist die Kraft, die auf einen materiellen Punkt der Masse ϱ wirkend die Elongation (h) hervorbringt, gleich $-k\,\varrho\,h$, so wird das ganze Fundament, dessen Masse m_1 ist, von der elastischen Kraft $-\Sigma k \cdot \varrho\, h = -k \cdot \frac{m_1}{2} \cdot y$ ergriffen; entsprechend berechnet sich die gesamte potentielle Energie zu $\frac{1}{4}\, m_1 y^2$. Wir können uns daher für den Ansatz vorstellen, daß das Fundament F mit der halben Masse $m = \frac{1}{2}\, m_1$ die Schwingung y ausführe.

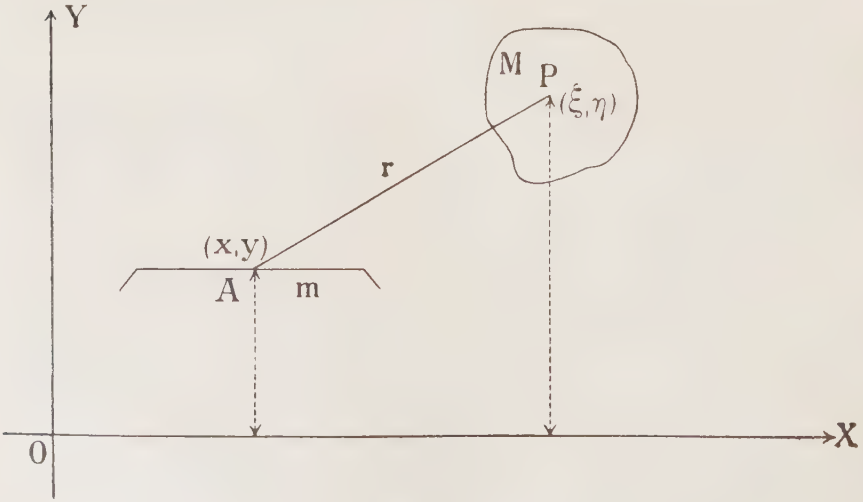
Wir nehmen uns vor, diese Bewegung von Motor und Unterlage, insbesondere die Stabiltät eines bestimmten näher zu charakterisierenden Bewegungszustandes zu untersuchen.



Figur 1.

a) Die Bewegungsgleichungen.

Wir beziehen die Bewegung auf ein senkrecht zur Rotationsachse A gelegtes ebenes Koordinatensystem (X, Y). dessen Y Achse parallel der Schwingungsrichtung des Fundamentes ist. Es bezeichnen (siehe Figur 2):



Figur 2.

(ξ, η) die Koordinaten von P, dem Schwerpunkte der Masse M,
(x y) die Koordinaten des Schnittpunktes der Koordinatenebene mit der Achse A,

r den Abstand von P von der Achse A (die Excentrizität),
φ den Winkel von r mit der X Achse,
S den Trägheitsradius inbezug auf eine durch P parallel der Rotationsachse gelegte Achse,
$\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{x}, \cdots$ die Ableitungen der betreffenden Größen $\xi, \eta, x, \cdots$ nach der Zeit.

Zur Bestimmung der Bewegung verwenden wir die Lagrange'schen Gleichungen II. Art und wählen y und φ als unabhängige Koordinaten des Systemes. Man erhält für die lebendige Kraft T

$$T = {}^1/_2[m\dot{y}^2 + M(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + MS^2\dot{\varphi}^2], \text{ oder da:}$$

$$\xi = x + r\cos\varphi;\ \dot{\xi} = -r\sin\varphi\,\dot{\varphi};$$

$$\eta = y + r\sin\varphi;\ \dot{\eta} = \dot{y} + r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi},$$

$$T = {}^1/_2[m\dot{y}^2 + M(\dot{y}^2 + (r^2 + S^2)\dot{\varphi}^2 + 2r\cos\varphi\,\dot{y}\,\dot{\varphi})].$$

Die elementare Arbeit bei einer virtuellen Verrückung des Systems ist:

$$\delta A = -a^2 y\,\delta y + D\,\delta\varphi.$$

Hierbei bedeutet $-a^2 y = -k\frac{m}{2}y$ die auf das Fundament wirkende elastische Kraft, D das auf den Motor wirkende Drehmoment. Die Bewegungsgleichungen sind demnach:

$$(1)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} \equiv (m + M)\ddot{y} + Mr\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi} - Mr\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 = -a^2 y,$$

$$(2)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \equiv M(r^2 + S^2)\ddot{\varphi} + Mr\cos\varphi\cdot\ddot{y} = D.$$

b) Die Hauptbewegung.

Die praktische Verwendung des Motors verlangt einen möglichst gleichmäßigen Gang desselben. Um unsere Gleichungen (1,2) auf die Möglichkeit eines solchen zu prüfen, hätten wir für φ eine periodische Funktion der Zeit anzusetzen und deren Wert in die Gleichungen einzuführen. Man sieht, daß dann Gl. (1) als Unbekannte nur mehr y enthält und die Bewegung des Fundamentes bestimmt; Gl. (2) dagegen liefert das Drehmoment, das man auf den Motor wirken lassen muß, damit die Bewegung von der geforderten Beschaffenheit ist. Wir nehmen diese Umgestaltung mit unseren Gleichungen vor unter Zugrundelegung einer besonders einfachen, aber praktisch wichtigen Bewegung, die wir im folgenden als Hauptbewegung bezeichnen und für die wir ansetzen:

(3) $$\varphi = \omega t; \dot{\varphi} = \omega; \ddot{\varphi} = 0,$$

so daß ω die konstante Rotationsgeschwindigkeit des Motors bedeutet. Die Gl. (1) und (2) werden nach Substitution von (3)

(4) $$(m+M)\ddot{y} - Mr\sin\omega t \cdot \omega^2 + a^2 y = 0$$

(5) $$Mr\cos\omega t \cdot \ddot{y} = D.$$

Diese beiden Gleichungen definieren mit (3) zusammen die Hauptbewegung. Man findet aus (4):

(6) $$y = A\cos\varkappa t + B\sin\varkappa t + \frac{L}{\varkappa^2 - \omega^2}\sin\omega t,$$ wobei A, B Integrationskonstanten sind,

(7) $$\varkappa^2 = \frac{a^2}{m+M}, L = \frac{Mr}{m+M}\cdot\omega^2$$ gesetzt ist und

(8) $$\varkappa \neq \omega$$ angenommen wurde.

Ist hingegen

(9) $$\varkappa = \omega,$$ so erhält man als Lösung von (4)

(10) $$y = A\cos\omega t + B\sin\omega t - \frac{L}{2\omega} t\cos\omega t$$

Gleichung (6) und (10) zeigen, daß die Schwingung des Fundamentes bei der Hauptbewegung des Motors abhängig ist von der Rotationsgeschwindigkeit ω. Ist ω sehr viel kleiner als $\varkappa$, so ist $\varkappa^2 - \omega^2$ groß und $\frac{L}{\varkappa^2 - \omega^2}$ klein: Die Schwingung des Fundamentes, die von der elastischen Kraft herrührt, wird durch die Rotation des Motors im Verhältnis nur wenig geändert. Je mehr aber ω sich $\varkappa$ nähert, umso größer wird der Anteil der von der Motorbewegung herrührenden Schwingung. Für $\varkappa = \omega$ tritt Resonanz ein: die Amplituden der Schwingungen sind bei festem ω nicht mehr konstant, sondern wachsen mit der Zeit. Zugleich ist ersichtlich, daß die Resonanz bei wachsendem ω umso früher eintritt, je kleiner $\varkappa^2$ ist. Überschreitet ω den Wert $\varkappa$, so nimmt die Lösung wieder die Form (6) an: Die vom Motor herrührende Schwingung nimmt an Intensität wieder ab.

Das Drehmoment, das man jeweils auf den Motor wirken lassen muß, um die Hauptbewegung zu erhalten, ergibt sich aus Gl. (5) zu: $D = Mr\cos\omega t \cdot \ddot{y}$; ist $k \neq \omega$, so wird nach (6)

(11) $$D = -(\varkappa^2 A\cos\varkappa t + B\varkappa^2\sin\varkappa t + \frac{L\omega^2}{\varkappa^2 - \omega^2}\cdot\sin\omega t)\,Mr\cos\omega t.$$

Ist hingegen $\varkappa = \omega$, so wird nach (10)

(12) $$D = -\left(A\varkappa^2\cos\varkappa t + B\varkappa^2\sin\varkappa t - \frac{L}{2}[2\sin\varkappa t + t\varkappa\cos\varkappa t]\right)Mr\cos\omega t.$$

c) Die Stabilität der Hauptbewegung.

Um die Stabilität der durch die Gleichungen (4) und (5) definierten Hauptbewegung zu untersuchen, ersetzen wir in den Bewegungsgleichungen (1), (2) unter Bezugnahme auf die Erörterungen in § 2, y und φ, die den ungestörten Bewegungszustand darstellen, durch $y+Y$ bez. $\varphi+\Phi$. Es stellt sodann $y+Y$ die Fundamentbewegung nach der Störung, Φ die Abweichung der Motorbewegung von der konstanten Rotation, die sogenannte Voreilung, dar. Wir werden die Bewegung unseres mechanischen Systems als stabil bezeichnen, wenn sowohl Y, Φ als y in kleinen Grenzen variieren. Hiernach kann man sofort ersehen, daß im Resonanzfall d. h. für $\omega=\varkappa$ von Stabilität keine Rede sein kann, denn dann wird, wie Gleichung (10) zeigt schon in der Hauptbewegung die Schwingung des Fundamentes mit wachsender Zeit beliebig groß. Wir schließen daher für die weitere Untersuchung den Fall $\omega=\varkappa$ aus. Vernachlässigt man nun in den Bewegungsgleichungen (1), (2) Produkte und höhere als erste Potenzen von Y, Φ und y, sowie deren Ableitungen nach der Zeit, so erhält man in erster Annäherung für Y und Φ die beiden Differentialgleichungen:

$$(13)\quad (m+M)\ddot{Y}+Mr\cos\omega t\cdot\ddot{\Phi}-Mr\sin\omega t\cdot\dot{\Phi}\cdot 2\omega-Mr\omega^2\cos\omega t\,\Phi+a^2Y=0$$

$$(14)\quad (r^2+S^2)\ddot{\Phi}+r\cos\omega t\cdot\ddot{Y}=0,$$

aus denen wir nun umgekehrt die Frage nach der Stabilität der Bewegung unseres Systems entscheiden wollen.

Gleichungen (13), (14) sind lineare Differentialgleichungen, deren Koeffizienten periodische Funktionen der Zeit mit der Periode

$$(15)\quad \omega_1=\frac{2\pi}{\omega}$$ sind. Es läßt sich zeigen, daß sie unter die ausgezeichnete Klasse linearer Differentialgleichungen fallen, die durch die Substitution

$$(16)\quad z=e^{\frac{2\pi i}{\omega_1}t}=e^{\omega i t}$$

in lineare Differentialgleichungen übergehen, die im Einheitskreis nur singuläre Stellen der Bestimmtheit haben.

§ 6. Fortsetzung. Diskussion der Stabilität.

Um den Nachweis für die letztere Behauptung zu führen, verwandeln wir die beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung (13) und (14) in ein System von vier Differentialgleichungen erster Ordnung. Es folgen zunächst aus (13) und (14) durch Elimination von $\ddot{\Phi}$ bez. $\ddot{Y}$ die beiden sie ersetzenden Gleichungen:

$$(17)\quad \ddot{Y}\cdot R-Mr(r^2+S^2)\cdot 2\omega\sin\omega t\cdot\dot{\Phi}-Mr(r^2+S^2)\omega^2\cos\omega t\cdot\Phi+a^2(r^2+S^2)Y=0;$$

(18) $\ddot{\Phi}\cdot R + M r^2 \sin\omega t\cos\omega t\cdot 2\omega\dot{\Phi} + M r^2\omega^2\cos^2\omega t\cdot\Phi - a^2 r\cos\omega t\cdot Y = 0;$

dabei ist zur Abkürzung

(19) $\qquad R = (m+M)(r^2+S^2) - M r^2\cos^2\omega t$ gesetzt.

Machen wir die Substitution:

(20) $\begin{cases} Y = x_1;\ \dot{Y} = x_2; \\ \Phi = x_3;\ \dot{\Phi} = x_4, \end{cases}$ so erhalten wir aus (17), (18)

das System:

(21) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1\cdot p_1 + x_3\cdot p_3 + x_4\cdot p_4, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = x_1\cdot q_1 + x_3\cdot q_3 + x_4\cdot q_4, \end{cases}$

mit den Koeffizienten:

(22) $\begin{cases} p_1 = -a^2(r^2+S^2)\dfrac{1}{R};\ p_3 = M r(r^2+S^2)\omega^2\cdot\cos\omega t\cdot\dfrac{1}{R}; \\ p_4 = 2\omega M r(r^2+S^2)\sin\omega t\dfrac{1}{R}; \\ q_1 = \dfrac{a^2 r\cos\omega t}{R};\ q_3 = -M r^2\omega^2\cos^2\omega t\,\dfrac{1}{R};\ q_4 = 2\omega M r^2\sin\omega t\cos\omega t\cdot\dfrac{1}{R}. \end{cases}$

Wir führen die Substitution (16) im System (21) aus; es ist:

(23) $\begin{cases} \dot{x}_i = \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{dx_i}{dz}\cdot z\dfrac{2\pi\cdot i}{\omega_1} = \dfrac{dx_i}{dz}\cdot z\cdot\omega i \\ \cos\omega t = \dfrac{e^{2\omega t i}+1}{2e^{\omega t i}} \text{ oder nach (15), (16)} \\ \qquad = \dfrac{z^2+1}{2z}, \text{ ebenso} \\ \sin\omega t = \dfrac{z^2-1}{2iz}. \end{cases}$

Führen wir aus (23) die Werte in (21), (22) ein, so erhalten wir das transformierte System:

(24) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dz}\cdot z = \dfrac{1}{\omega i}x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dz}\cdot z = \dfrac{1}{\omega i}(\bar{p}_1 x_1 + \bar{p}_3 x_3 + \bar{p}_4 x_4) \\ \dfrac{dx_3}{dz}\cdot z = \dfrac{1}{\omega i}x_4 \\ \dfrac{dx_4}{dz}\cdot z = \dfrac{1}{\omega i}(\bar{q}_1 x_1 + \bar{q}_3 x_3 + \bar{q}_4 x_4), \end{cases}$

mit den Koeffizienten:

$$(25)\quad \begin{cases} \bar{p}_1 = \dfrac{-a^2(r^2+S^2)\cdot 4z^2}{T};\ \bar{p}_3 = \dfrac{Mr(r^2+S^2)\omega^2 2z(z^2+1)}{T} \\ \bar{p}_4 = \dfrac{2\omega Mr(r^2+S^2)2z(z^2-1)}{Ti};\ \bar{q}_1 = \dfrac{a^2 r(z^2+1)\cdot 2z}{T} \\ \bar{q}_3 = -\dfrac{Mr^2\omega^2(z^2+1)^2}{T};\ \bar{q}_4 = 2\omega Mr^2\dfrac{(z^2-1)(z^2+1)}{Ti} \end{cases}$$

$$\text{und: } T = 4z^2(m+M)(r^2+S^2) - Mr^2(z^2+1)^2.$$

Die singulären Punkte des Systems (24) sind $z = o$ und die Wurzeln der Gleichung

$$(26)\qquad T = o.$$

Wir schreiben die letztere, wenn wir zur Abkürzung

$$(27)\qquad \frac{Mr^2}{(m+M)(r^2+S^2)} = \frac{1}{\lambda} \text{ setzen:}$$

$$(26')\qquad z^4 - 2z^2(2\lambda - 1) + 1 = o.$$

Ihre Wurzeln sind:

$$(28)\quad \begin{cases} z_1 = +\sqrt{+y_1};\ z_2 = -\sqrt{+y_1};\ z_3 = +\sqrt{+y_2};\ z_4 = -\sqrt{+y_2}, \text{ wobei} \\ y_1 = 2\lambda - 1 + 2\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda-1};\ y_2 = 2\lambda - 1 - 2\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda-1}. \end{cases}$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß nur zwei dieser Wurzeln im Einheitskreise liegen. Führt man nämlich durch die Gleichung $z^2 = \dfrac{w-1}{w+1}$ in Gleichung (26′) w ein, so muß für jede Wurzel, für die $|z| \lesseqgtr 1$, der reelle Teil des entsprechenden w: $R(w) \gtreqless 0$ sein und umgekehrt. Aus der Gleichung für w: $w^2(\lambda - 1) - \lambda = 0$ folgt aber, da nach (27) $\lambda > 1$ ist,

$$w_1 = +\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-1}} > 0;\ w_2 = -\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-1}} < 0.$$

Es ergibt sich, daß nur für

$$y_1 = z^2 = \frac{w_1 - 1}{w_1 + 1} \text{ die Werte z im Einheits-}$$

kreise liegen. Zugleich erkennt man, daß wegen $\lambda > 1$ die Gleichung (26) keine Doppelwurzel haben kann.

Wir führen jetzt nacheinander an den singulären Stellen $z = 0$, z_1 und z_2 die im allgemeinen Teil angedeutete Untersuchung und stellen daselbst die determinierenden Gleichungen sowie die zugehörigen Fundamentalsubstitutionen auf.

(α) *Die Stelle* $z = 0$.

Die Stelle $z = 0$ ist, wie man aus (24), (25) ersieht, und wie man aus (21), (22) nach dem am Schluß von § 3 angegebenen Kriterium hätte erkennen können, für das Differentialgleichungssystem eine singuläre Stelle der Bestimmtheit.

Die Koeffizienten $\bar{p}_i$, $\bar{q}_i$ nehmen an der Stelle $z = 0$ die Werte an:

$$\bar{p}_1(0) = 0;\ \bar{p}_3(0) = 0;\ \bar{p}_4(0) = 0;$$
$$\bar{q}_1(0) = 0;\ \bar{q}_3(0) = \omega^2;\ \bar{q}_4(0) = -i2\omega,$$

und die zu $z = 0$ gehörige determinierende Gleichung wird nach § 3:

$$(29) \qquad F_0(\bar{r}) = \begin{vmatrix} -\bar{r}, & \frac{1}{\omega i}, & 0, & 0 \\ 0, & -\bar{r}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -\bar{r}, & \frac{1}{\omega i} \\ 0, & 0, & \frac{\omega}{i}, & -2-\bar{r} \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$F_0(\bar{r}) = \bar{r}^2(\bar{r}^2 + 2\bar{r} + 1) = 0.$$

Die Verzweigungsexponenten sind demnach:

$$\bar{r}_{01} = 0;\ \bar{r}_{02} = 0;\ \bar{r}_{03} = -\tfrac{1}{2};\ \bar{r}_{04} = -\tfrac{1}{2}.$$

Da dieselben sich um keine ganze Zahl unterscheiden, so existiert nach § 3 an der Stelle $z = 0$ ein kanonisches Fundamentalsystem

$$(30) \qquad \begin{cases} x_{01} = \varphi_1(z) \\ x_{02} = \varphi_2(z) + \log z \cdot \varphi_1(z) \\ x_{03} = z^{-1/2} \cdot \varphi_3(z) \\ x_{04} = z^{-1/2}[\varphi_4(z) + \log z\, \varphi_3(z)], \end{cases}$$

wobei die φ_i reguläre analytische Funktionen von z sind.

Dieses Fundamentalsystem erleidet beim Umlauf um die Stelle $z = 0$ die Substitution:

$$(31) \qquad \begin{cases} \bar{x}_{01} = x_{01} \\ \bar{x}_{02} = 2\pi i\, x_{01} + x_{02} \\ \bar{x}_{03} = x_{03} \cdot e^{-\pi i} \\ \bar{x}_{04} = e^{-\pi i}(x_{03} \cdot 2\pi i + x_{04}), \end{cases}$$

deren Matrix wir mit S_0 bezeichnen wollen:

$$(32) \qquad S_0 = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 2\pi i, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & e^{-\pi i}, & 0 \\ 0, & 0, & 2\pi i e^{-\pi i}, & e^{-\pi i} \end{Vmatrix},$$

(β) Die Stellen z_1 und z_2.

Um die Singularitäten der Stellen z_1, z_2 zu untersuchen, bringen wir das System (24) daselbst auf die Normalform:

$$(33)\quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dz}(z-z_1) = \frac{1}{\omega i z}(z-z_1)\,x_2 \\ \frac{dx_2}{dz}(z-z_1) = \frac{1}{\omega i z}(z-z_1)\left[\bar{p}_1 x_1 + \bar{p}_3 x_3 + \bar{p}_4 x_4\right] \\ \frac{dx_3}{dz}(z-z_1) = \frac{1}{\omega i z}(z-z_1)\,x_4 \\ \frac{dx_4}{dz}(z-z_1) = \frac{1}{\omega i z}(z-z_1)\left[\bar{q}_1 x_1 + \bar{q}_3 x_3 + \bar{q}_4 x_4\right] \end{cases}$$

und entnehmen hieraus die determinierende Gleichung

$$F_1(\bar{r}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \bar{r}, \ldots . & a_{14} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{41}, \ldots \ldots & a_{44} - \bar{r} \end{vmatrix} = 0.$$

Dabei ist:

$$a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{22} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = a_{34} = a_{42} = 0;$$

demnach wird $F_1(\bar{r}) = \begin{vmatrix} -\bar{r}, & 0, & 0, & 0 \\ a_{21}, & -\bar{r}, & a_{23}, & a_{24} \\ 0, & 0, & -\bar{r}, & 0 \\ a_{41}, & 0, & a_{43}, & a_{44} - \bar{r} \end{vmatrix} = \bar{r}^3(\bar{r} - a_{44}) = 0.$

Für a_{44} ergibt sich:

$$a_{44} = \lim_{z=z_1} \frac{z - z_1}{\omega i z} \cdot \bar{q}_4 = -2\,M r^2 \lim_{z=z_1} \frac{z - z_1}{z} \frac{(z^2-1)(z^2+1)}{T},$$

oder da: $\lim_{z=z_1} \frac{T}{z - z_1} = \left(\frac{dT}{dz}\right)_{z_1} = 4 z_1\left[2(m+M)(r^2+S^2) - M r^2 (z_1^2+1)\right]$,

$$a_{44} = -\frac{(z_1^4-1)}{(2\lambda - z_1^2 - 1)\,2 z_1^2} = -\frac{y_1(2\lambda - 1) - 1}{y_1(2\lambda - 1) - y_1^2} \text{ (nach (26)', (28)).}$$

Die Wurzeln der zu z_1 gehörigen determinierenden Gleichung sind demnach:

$$r_{10} = 0;\ r_{12} = 0;\ r_{13} = 0;\ r_{14} = a_{44},\ \text{und}$$

das kanonische Fundamentalsystem an der Stelle z_1 hat die Gestalt:

$$(36)\quad \begin{cases} x_{11} = \varphi_1(z - z_1) \\ x_{12} = \varphi_2(z - z_1) + \varphi_1\ (z - z_1)\log(z - z_1) \\ x_{13} = \varphi_3(z - z_1) + 2\varphi_2(z - z_1)\log(z - z_1) + \varphi_1(z - z_1)\log^2(z - z_1) \\ x_{14} = \varphi_4(z - z_1)\cdot z^{a_{44}} \end{cases}$$

so daß die Fundamentalsubstitution beim Umlauf um die singuläre Stelle durch die Matrix dargestellt wird:

$$(37) \qquad S_1 = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 2\pi i, & 1, & 0, & 0 \\ -4\pi^2, & 4\pi i, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & e^{2\pi i a_{44}} \end{Vmatrix}.$$

Genau dieselbe Matrix erhält man für die Fundamentalsubstitution S_2 an der Stelle $z = z_2$:

$$S_2 = S_1.$$

Die aus S_1, S_2, S_0 komponierte Matrix

$$(38) \qquad S_1 S_2 S_0 = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 6\pi i, & 1, & 0, & 0 \\ -32\pi^2, & 8\pi i, & e^{-\pi i}, & 0 \\ 0, & 0, & 2\pi i \cdot e^{\pi i(4a_{44}-1)}, & e^{\pi i(4a_{44}-1)} \end{Vmatrix}$$

liefert schließlich die Fundamentalgleichung $\bar{A}(\bar{s}) = 0$, die zum Umlauf auf dem Einheitskreise gehört; wir entnehmen ihr die Wurzeln:

$$s_1 = 1; \quad s_2 = 1; \quad s_3 = -1; \quad s_4 = -e^{4\pi i a_{44}}.$$

Man überzeugt sich, daß der Wurzel (1) zwei einfache Elementarteiler entsprechen, und da nach (35) und (28) a_{44} eine reelle Zahl, so ist weiter $|s_3| = |s_4| = 1$. Das sind aber nach Satz V die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine Stabilität der II. Art.

Wir formulieren das Ergebnis in dem

Satz:

Die Bewegung des betrachteten mechanischen Systems, das aus einem auf elastischer Unterlage laufenden Motor besteht, ist für beliebige Rotationsgeschwindigkeiten des Motors, die $\neq \varkappa$ sind, stabil von der II. Art. Für die Geschwindigkeit $\varkappa$ im Resonanzfall hingegen ist das System instabil.

Lebenslauf.

Ich, Georg Dorner, Sohn des Kaufmanns Adam Dorner und seiner Ehefrau Marie, geb. Dreher, wurde am 7. Mai 1887 zu Riedlingen a. Donau in Württemberg geboren. Ich besuchte bis zum Jahre 1902 die dortige Real-Lateinschule und von 1902—1907 die Oberrealschule beim Kaiserpalast zu Straßburg i. E. Seit 1907 studierte ich in München, Göttingen und Straßburg Mathematik, Physik und Philosophie.

Meine Lehrer waren die Herren Professoren: Cl. Bäumker, F. Braun, E. Cohn, P. Epstein, L. Graetz, D. Hilbert, P. Koebe, E. Landau, F. Lindemann, Th. Lipps, R. v. Mises, Th. Reye, E. Riecke, F. Schur, G. Störring, E. Timerding, H. Voß, H. Weber, J. Wellstein, E. Zermelo.

Die vorliegende Arbeit ist auf Anregung von Herrn Prof. Dr. v. Mises entstanden, der mich auch bei der Ausführung in zuvorkommendster Weise mit seinem Rat unterstützt hat. Ich möchte ihm hierfür auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen.